EXERCICES : PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

Exercice 1 : Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne le point $A(-1;2;0)$.

1. Rappeler la définition de la sphère (S) de centre A de rayon 3.
2. Démontrer qu'une équation de (S) est :

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$$

3. Déterminer les points I et J communs à (S) et à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\left(-1;\frac{1}{2};1\right)$
4. Sans calculs, déterminer IJ.
5. Justifier que (S) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=0$

Exercice 2 : **Norme et équation cartésienne de sphère**

Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace :

1. Montrer que la sphère S de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que

$$\boxed{(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=r^2}$$

où $(x_\Omega;y_\Omega;z_\Omega)$ sont les coordonnées du centre de la sphère S et r son rayon.

2. **Application 1** : Pour chacune des équations suivantes, dites si c'est l'équation d'une sphère dans l'espace. Si oui, préciser son centre et son rayon.

   a. $x^2+y^2+z^2-2x+y-6z=-10$ **b.** $x^2+y^2+z^2-2x-6y+11=0$

3. **Application 2** : On donne les points $A(-1;2,2)$, $B(1,2,2)$ et $C(1;-2,2)$.

   a. i. Démontrer que les trois points A, B et C sont sur une sphère (S) de centre $D(0;0;4)$ dont on précisera le rayon.
   ii. En déduire une équation cartésienne de (S).
   iii. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IO) où I désigne le milieu du segment [AB].
   iv. Déterminer les points d'intersection de (OI) et de la sphère (S).

   b. i. Montrer que OA = OB = OC.
   ii. En déduire une deuxième sphère (S′) passant par A, B et C, et en donner une équation cartésienne.

Exercice 3 : **Pour aller plus loin**

Dans cet exercice, on cherche à montrer qu'il existe un infinité de sphères passant par trois points donnés.
On appelle **plan médiateur** d'un segment [AB] l'ensemble des points équidistants de A et B.

1. On reprend les points de l'application 2 de l'exercice précédent.

   a. Montrer qu'un point $M(x;y;z)$ appartient au plan médiateur Π_1 de [AB] si et seulement si $x=0$.
   b. Montrer qu'un point $M(x;y;z)$ appartient au plan médiateur Π_2 de [BC] si et seulement si $y=0$.
   c. Caractériser l'intersection d de Π_1 et Π_2.
   d. Que pouvez-vous en déduire sur les coordonnées du centre Ω d'une sphère (S) passant par A, B et C ?

e. Soit $E(0;0;t)$ avec $t \in \mathbb{R}$. Montrer que E est le centre d'une sphère passant par A, B et C.

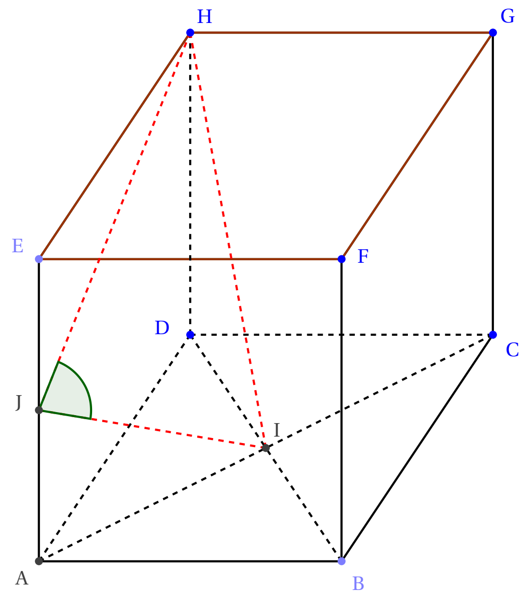
f. Conclure.

2. Dans l'espace, existe-t-il toujours une infinité de sphère passant par trois points donnés ? Justifier.

3. Dans le plan, combien existe-t-il de cercle(s) passant par trois points donnés ? Justifier.

Exercice 4 : On considère un cube ABCDEFGH d'arête a. I est le centre de la face ABCD et J le milieu du segment [AE].

1. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{DB}$.
2. Déterminer les longueurs des côtés du triangle IJH.
3. En déduire à $0,1°$ près, la mesure de l'angle géométrique $\widehat{IJH}$



Exercice 5 : On reprend la figure de l'exercice précédent.

1. Calculer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{GB} \quad ; \quad \overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{DB} \quad ; \quad \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CB} \quad ; \quad \overrightarrow{HJ}\cdot\overrightarrow{JB}$$

2. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{HJB}$ à $0,1°$ près.

Exercice 6 : Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne les points $A(-1;1;2)$, $B(0;1;0)$ et $C(2;0;3)$.

1. Calculer les produits scalaires :

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} \quad ; \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$$

2. Déterminer une valeur approchée, à $0,1°$, les mesures en degrés des angles géométriques : $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$

Exercice 7 : Soient ABCD un tétraèdre régulier de côté a et I le milieu du segment [BC].
Déterminer un valeur approchée en degré de la mesure de l'angle $\widehat{AID}$

Exercice 8 : On considère un tétraèdre régulier ABCD, I et J les milieux respectifs des arêtes [AB] et [CD].
G est le milieu du segment [IJ].

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GC}$.
2. En déduire à $0,1°$ près la mesure de l'angle $\widehat{AGC}$.

Exercice 9 : On considère un tétraèdre ABCD, dans lequel la face ABC est un triangle équilatéral de côté 1, et les faces ACD et BCD sont des triangles isocèles rectangles en C.

- Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$. puis $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$.
- Soit H le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABD. En exprimant d'une autre façon le produit scalaire $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$, déterminer la position de H sur le segment [AD].
- Calculer une valeur approchée de l'angle géométrique $\widehat{HCB}$.

Exercice 10 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Etablir l'équivalence :

$$\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right| = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Exercice 11 : On considère les points $A(3;4;-2)$, $B(1;6;0)$ et $C(-2;2;1)$.
Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Exercice 12 : Donner une équation cartésienne du plan passant par A et admettant $\vec{n}$ comme vecteur normal, dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

1. $A(3;-1;2)$ et $\vec{n}(1;0;-4)$
2. $A(1;-1;0)$ et $\vec{n}(1;1;-2)$
3. $A(-2;1;2)$ et $\vec{n}=\vec{i}+\vec{j}$
4. $A(3;4;5)$ et $\vec{n}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5}\right)$

Exercice 13 : Verifier que chaque équation proposée est l'équation cartésienne d'un plan et trouver un point de ce plan et un vecteur normal :

1. $3x-5y+z-1=0$
2. $x=y$
3. $3z-x-3=0$
4. $y=-2x+1$

Exercice 14 : Dans chaque cas, donner une équation cartésienne du plan P (déterminer d'abord un point de ce plan et un vecteur normal) :

1. P est le plan médiateur du segment [AB] avec $A(-1;3;1)$ et $B(0;5;-3)$.
2. P est le plan orthogonal à la droite (AC) passant par l'orthocentre du triangle ABC avec $A(3;0;4)$, $B(-1;1;1)$ et $C(2;0;0)$.

Exercice 15 : Quelle est l'équation générale d'un plan parallèle au plan (xOy) ?

Exercice 16 : Quelle est l'équation générale d'un plan perpendiculaire au plan (xOy) ?

Exercice 17 : Soit $P: 2x-z=0$ et $d:\begin{cases} x=t-1 \\ y=-3t \\ z=2 \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$.
Déterminer les coordonnées du point $A=P\cap d$.

Exercice 18 : On donne $A(1;-1;0)$, $B(0;-1;1)$, $C(3;-2;0)$ et $D(2;-3;3)$.
Etudier l'intersection des droites (AB) et (CD).

Exercice 19 : Donner une représentation paramétrique de la droite d définie, intersection des plans P et Q d'équations respectives :

$$P: 2x+y-z-2=0 \quad \text{et} \quad Q: x+3y+7z-11=0$$

Exercice 20 : Déterminer l'intersection des plans P, Q et R avec :

$$P: 2x+3y-2z-2=0 \quad \text{ou} \quad Q: 4x-3y+z-4=0 \quad \text{ou} \quad R: 2x+12y-7z-2=0$$

ANNALES

I) Nouvelle-Calédonie mars 2011

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A$(-2\,;\,0\,;\,1)$, B$(1\,;\,2\,;\,-1)$ et C$(-2\,;\,2\,;\,2)$.

1. **a.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.

b. En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

c. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 2z + 2 = 0$.

3. Soient $\mathscr{P}_1$, et $\mathscr{P}_2$ les plans d'équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.
Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2 \\ y &=& -1+3t \\ z &=& t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

4. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

5. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega(1\,;\,-3\,;\,1)$ et de rayon $r = 3$.

a. Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$.

b. Étudier l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

II) Antilles, sept 2011

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les trois points A, B et C de coordonnées respectives :
A$(-1\,;\,2\,;\,1)$, B$(1\,;\,-6\,;\,-1)$ et C $(2\,;\,2\,;\,2)$.

1. **a.** Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soit P le plan d'équation : $x - y + z - 4 = 0$.

a. Montrer que les plans (ABC) et P sont sécants.

b. Soit D la droite intersection des plans P et (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite D.

3. On considère la sphère S de centre $\Omega(3 ; 1 ; 3)$ et de rayon 3 et on nomme I le point de coordonnées $(2 ; -1 ; 1)$.
On admet que la droite D a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 1+t \\ y & = & -3+2t \\ z & = & t, \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

a. Montrer que le point I appartient à la droite D.

b. Montrer que le point I appartient à la sphère S.

c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Montrer que la droite D coupe la sphère S en un deuxième point.

III) Centres étrangers juin 2012

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE}\right)$.
On considère les points $I\left(1 ; \dfrac{1}{3} ; 0\right)$, $J\left(0 ; \dfrac{2}{3} ; 1\right)$, $K\left(\dfrac{3}{4} ; 0 ; 1\right)$ et $L(a ; 1 ; 0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{4} + t'\left(a - \dfrac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{array}\right. , \ t' \in \mathbb{R}$$

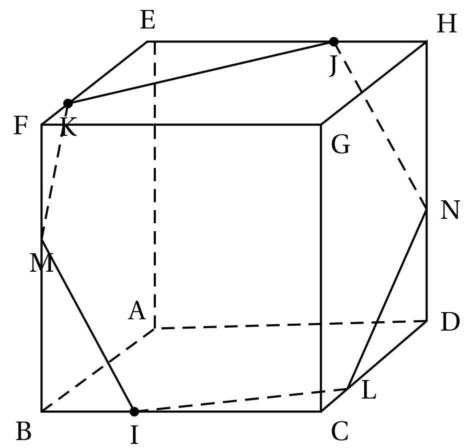
3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \dfrac{1}{4}$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \dfrac{1}{4}$.
Le point L a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{4} ; 1 ; 0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. .
On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).



Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.

a. Prouver que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(8\,;9\,;5)$ est un vecteur normal au plan (IJK).

b. En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x+9y+5z-11=0$.

c. En déduire les coordonnées des points M et N

IV) Pondichéry avril 2012

Dans le repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace, on considère :

– les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations :

$$\mathscr{P} : x-y-z-2=0 \quad \text{et} \quad \mathscr{P}' : x+y+3z=0.$$

– la droite $\mathscr{D}$ ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -3-2t \\ y & = & 2t \\ z & = & 1+2t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une justification est attendue pour chaque réponse.

Proposition 1
La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
Proposition 3
L'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ est la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-t' \\ y & = & -1-2t' \\ z & = & t' \end{array}\right. \qquad t' \in \mathbb{R}.$$

Proposition 4
Les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont coplanaires.

V) Nouvelle-Calédonie novembre 2011

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points : $A(0\,;0\,;2)$, $B(0\,;4\,;0)$ et $C(2\,;0\,;0)$.

1. Vérifier qu'une équation du plan (ABC) est : $2x + y + 2z = 4$.

2. **a.** Déterminer une équation du plan P passant par A et orthogonal à la droite (BC).

b. Soit Δ la droite intersection du plan P et du plan (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ. Quel rôle joue cette droite dans le triangle ABC ?

3. **a.** Soit Δ' la médiane issue de B du triangle ABC.
Montrer qu'une équation paramétrique de Δ' dans le triangle ABC est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& 4-4t, \\ z &=& t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

b. Montrer que le triangle ABC est un triangle isocèle.

4. Soit H le point d'intersection des droites Δ et Δ'. Montrer que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9}\,;\,\frac{4}{9}\,;\,\frac{8}{9}\right)$.
Que représente le point H pour le triangle ABC ?

5. Montrer que le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

VI) Polynésie septembre 2011

Partie A

On rappelle que pour tous les points E et F de l'espace, $EF^2 = \overrightarrow{EF}^2 = \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EF}$.
Soient A et B deux points distincts de l'espace et I le milieu de [AB].

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2.$$

2. Déterminer la nature de l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que

$$MA^2 + MB^2 = AB^2.$$

Partie B

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives : $3x + 4y + z - 1 = 0$ et
$x - 2y - z + 5 = 0$ et les points A et B de coordonnées respectives $(-1\,;\,0\,;\,4)$ et $(3\,;\,-4\,;\,2)$.

1. Montrer que les plans (P) et (Q) sont sécants.
On nomme (Δ) la droite d'intersection des plans (P) et (Q).

a. Montrer que le point A appartient à la droite (Δ).

b. Montrer que $\overrightarrow{u}\,(1\ ;\ -2\ ;\ 5)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

c. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (Δ).

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit (E) l'ensemble des points M de l'espace tels que $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = \mathrm{AB}^2$.

Déterminer l'ensemble des points d'intersection de (E) et de la droite (Δ). On précisera les coordonnées de ces points.

VII) Antilles-Guyane juin 2011

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.

On considère la droite D passant par le point A de coordonnées $(3\ ;\ -4\ ;\ 1)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\,(1\ ;\ -3\ ;\ 1)$.
On considère la droite D′ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1-t \\ y & = & 2+t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z & = & 1-t \end{array}\right.$$

On admet qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites D et D′. On se propose de déterminer une représentation paramétrique de cette droite Δ et de calculer la distance entre les droites D et D′, distance qui sera définie à la question **5.**
On note H le point d'intersection des droites D et Δ, H′ le point d'intersection des droites D′ et Δ. On appelle P le plan contenant la droite D et la droite Δ. On admet que le plan P et la droite D′ sont sécants en H′. Une figure est donnée en **annexe 2**.

1. On considère le vecteur $\overrightarrow{w}$ de coordonnées $(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$. Démontrer que $\overrightarrow{w}$ est une vecteur directeur de la droite Δ.

2. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\ ;\ 2\ ;\ 3)$.

a. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan P.

b. Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $3x+2y+3z-4=0$.

3. a. Démontrer que le point H′ a pour coordonnées $(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

b. En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ.

4. a. Déterminer les coordonnées du point H.

b. Calculer la longueur HH′.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

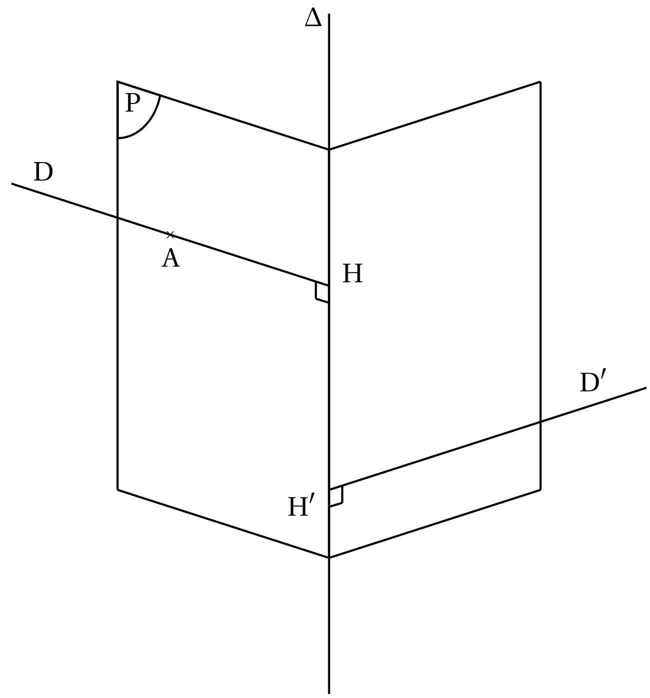
L'objectif de cette question est de montrer que, pour tout point M appartenant à D et tout point M′ appartenant à D′, $\mathrm{MM'} \geqslant \mathrm{HH'}$.

a. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{MM'}}$ peut s'écrire comme la somme de $\overrightarrow{\mathrm{HH'}}$ et d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{HH'}}$.

b. En déduire que $\left\|\overrightarrow{\mathrm{MM'}}\right\|^2 \geqslant \left\|\overrightarrow{\mathrm{HH'}}\right\|^2$ et conclure.

La longueur HH′ *réalise donc le minimum des distances entre une point de* D *et une point de* D′. *On l'appelle distance entre les droites* D *et* D′.

Annexe (non spé)



VIII) Métropole, sept 2011

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On désigne par a, b, c, d quatre réels tels que le vecteur $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ soit différent du vecteur nul. On appelle P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.
Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P, c'est-à-dire que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points quelconques du plan P.

Partie B - Questionnaire à choix multiples

Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie ainsi que la justification de ce choix.
Il est attribué 1 point si la réponse est exacte et justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

On désigne par P le plan d'équation cartésienne $2x - y + 3z = 0$ et par A et B les deux points du plan P de coordonnées respectives $(1 ; 2 ; 0)$ et $(0 ; 3 ; 1)$.

1. Soient C, D, E les points de coordonnées respectives $(1 ; 1 ; -1)$, $(-1 ; 4 ; 2)$, $(1 ; 5 ; 1)$.
   - **a.** Les points A, B, C définissent le plan P.
   - **b.** Les points A, B, D définissent le plan P.
   - **c.** Les points A, B, E définissent le plan P.

2. La droite D est définie par la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t, \\ z = 2+t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

   a. La droite D est perpendiculaire au plan P.

   b. La droite D est strictement parallèle au plan P.

   c. La droite D est incluse dans le plan P.

3. Soit S la sphère de centre Ω, de coordonnées $(2\,;\,5\,;\,1)$, et de rayon $\frac{1}{2}$. L'ensemble des points communs à la sphère S et au plan P est :

   a. vide,

   b. constitué d'un seul point,

   c. un cercle.

IX) Liban juin 2010

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On note (D) la droite passant par les points $A(1\,;\,-2\,;\,-1)$ et $B(3\,;\,-5\,;\,-2)$.

1. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t \\ z = -1-t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. On note (D′) la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2-k \\ y = 1+2k \\ z = k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

   Montrer que les droites (D) et (D′) ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan (P) d'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$.

   a. Montrer que le plan (P) contient la droite (D).

   b. Montrer que le plan (P) et la droite (D′) se coupent en un point C dont on précisera les coordonnées.

4. On considère la droite (Δ) passant par le point C et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$.

   a. Montrer que les droites (Δ) et (D′) sont perpendiculaires.

   b. Montrer que la droite (Δ) coupe perpendiculairement la droite (D) en un point E dont on précisera les coordonnées.

X) Centres étrangers juin 2010

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Question 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ de représentations paramétriques :

$$(\mathscr{D}_1)\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+2t \\ y &=& -3t \\ z &=& 1+t \end{array}\right. \ (t\in\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathscr{D}_2)\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-2t \\ y &=& 5-t \\ z &=& -2+t \end{array}\right. \ (t\in\mathbb{R}).$$

Affirmation : Les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont orthogonales.

Question 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le point A de coordonnées $(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$ et la droite $(\mathscr{D})$ de représentation paramétrique :

$$(\mathscr{D})\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+4t \\ y &=& -2+2t \\ z &=& 3-2t \end{array}\right. \ (t\in\mathbb{R}).$$

Affirmation : Le plan $(\mathscr{P})$ contenant le point A et orthogonal à la droite $(\mathscr{D})$ a pour équation : $2x+y-z=0$.

XI) Pondichéry avril 2010

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.

1. La droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t+2 \\ y &=& -2t \\ z &=& 3t-1 \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$ est parallèle au plan dont une équation cartésienne est : $x+2y+z-3=0$.
2. Les plans P, P$'$, P$''$ d'équations respectives $x-2y+3z=3$, $2x+3y-2z=6$ et $4x-y+4z=12$ n'ont pas de point commun.
3. Les droites de représentations paramétriques respectives
$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2-3t \\ y &=& 1+t \\ z &=& -3+2t \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$ et $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 7+2u \\ y &=& 2+2u \\ z &=& -6-u \end{array}\right.$, $u\in\mathbb{R}$ sont sécantes.
4. On considère les points : $\mathrm{A}(-1\ ;\ 0\ ;\ 2)$, $\mathrm{B}(1\ ;\ 4\ ;\ 0)$, et $\mathrm{C}(3\ ;\ -4\ ;\ -2)$.
Le plan (ABC) a pour équation $x+z=1$.

XII) Amérique du Sud novembre 2009

Partie B

On considère les points A de coordonnées $(3\ ;\ -2\ ;\ 2)$, B de coordonnées $(6\ ;\ -2\ ;\ -1)$, C de coordonnées $(6\ ;\ 1\ ;\ 5)$ et D de coordonnées $(4\ ;\ 0\ ;\ -1)$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle. En déduire l'aire du triangle ABC.
2. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$ est normal au plan (ABC).
   Déterminer une équation du plan (ABC).

Partie C

Soit Q le plan d'équation $x-2y+z-5=0$.

1. Déterminer la position relative des deux plans Q et (ABC).
2. Q coupe les droites (DA), (DB) et (DC) respectivement en E, F et G.
   Déterminer les coordonnées de E et montrer que E appartient au segment [DA].

XIII) La Réunion juin 2009

Soient A(1 ; 2 ; 0), B(2 ; 2 ; 0), C(1 ; 3 ; 0) et D(1 ; 2 ; 1) quatre points de l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
(P) désigne le plan orthogonal à (BC) contenant A ;
(Q) désigne le plan orthogonal à (DC) contenant A ;
(R) désigne le plan orthogonal à (BD) contenant A.

1. Montrer que le plan (P) a pour équation cartésienne $x-y+1=0$.
   On admet que le plan (Q) a pour équation cartésienne $-y+z+2=0$ et que le plan (R) a pour équation cartésienne $-x+z+1=0$.
2. **a.** Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+1 & = & 0 \\ -y+z+2 & = & 0 \\ -x+z+1 & = & 0 \end{array}\right.$
   b. En déduire que l'intersection des trois plans (P), (Q) et (R) est une droite (d) passant par le point E(2 ; 3 ; 1).
   c. Vérifier que la droite (d) est orthogonale au plan (BCD).
   En déduire une équation cartésienne du plan (BCD).
3. Déterminer une équation cartésienne pour chacun des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

   On admet que ces plans sont respectivement parallèles aux plans de repères $(O\vec{\imath}; \vec{\jmath})$, $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{k}\right)$ *et* $\left(O\ ;\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

XIV) Centres étrangers juin 2009

On se propose dans cet exercice, d'étudier des propriétés d'un solide de l'espace.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.
On considère les points A(3 ; 4 ; 0) ; B(0 ; 5 ; 0) et C(0 ; 0 ; 5). On note I le milieu du segment [AB].

1. Faire une figure où l'on placera les points A, B, C, I dans le repère $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.
2. Démontrer que les triangles OAC et OBC sont rectangles et isocèles.
   Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Soit H le point de coordonnées $\left(\dfrac{15}{19}\ ;\ \dfrac{45}{19}\ ;\ \dfrac{45}{19}\right)$.
   a. Démontrer que les points H, C, I sont alignés.
   b. Démontrer que H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

c. En déduire une équation cartésienne du plan ABC.

4. Calculs d'aire et de volume.

a. Calculer l'aire du triangle OAB. En déduire le volume du tétraèdre OABC.

b. Déterminer la distance du point O au plan (ABC).

c. Calculer l'aire du triangle ABC.

XV) Pondichéry avril 2009

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points :
A de coordonnées $(1\,;1\,;0)$, B de coordonnées $(2\,;0\,;3)$, C de coordonnées $(0\,;-2\,;5)$ et D de coordonnées $(1\,;-5\,;5)$.

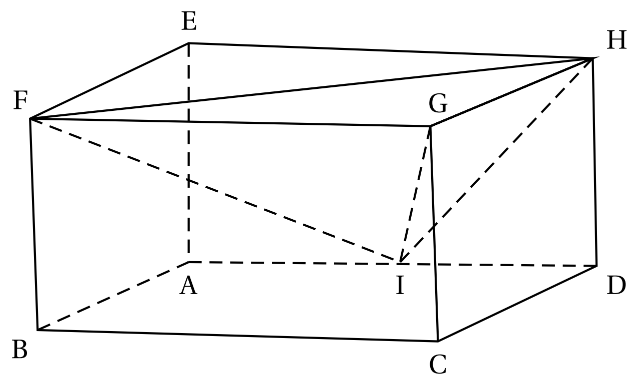
Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou par FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :
Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées $(x,\ y,\ z)$ tels que $y = 2x+4$ est une droite.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées (3, 3, 0) et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x + 2y + z + 3 = 0$.

XVI) Amérique du Sud novembre 2008

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit
ABCDEFGH tel que : AB = 1, AD = 2 et AE = 1.
On appelle I le milieu de [AD].



L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AI}\,;\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H.

2. Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.

3. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2\,;1\,;-1)$.

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (FIH).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).

4. **a.** La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?

b. Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

c. Déterminer les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*
   Soit Γ la sphère de centre G passant par K.
   Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (FIH) ?
   (On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection)

XVII) Asie juin 2008

A -Vrai ou faux ?
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse la démonstration consistera à proposer un contre-exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exempte.

Rappel des notations :
- *$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ désigne l'ensemble des points communs aux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.*
- *L'écriture $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \emptyset$ signifie que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ n'ont aucun point commun.*

1. Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :
$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \emptyset \text{ et } \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \emptyset,$$
   alors on peut conclure que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ vérifient : $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 \neq \emptyset$.
2. Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :
$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset$$
   alors on peut conclure que $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont tels que : $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \emptyset$ et $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset$.
3. Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :
$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \emptyset \text{ et } \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset,$$
   alors on peut conclure que $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ vérifient : $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \emptyset$.
4. Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont deux plans distincts et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace vérifiant :
$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{D} \neq \emptyset \text{ et } \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \emptyset,$$
   alors on peut conclure que $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{D} \neq \emptyset$

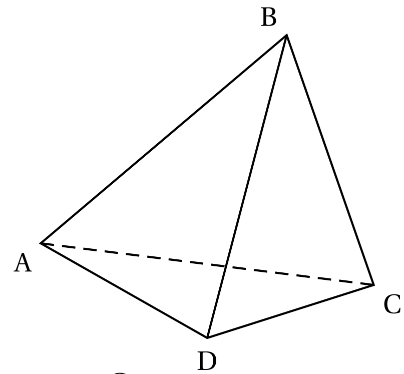
B - Intersection de trois plans donnés

Dans un repère orthonorrnal de l'espace on considére les trois plans suivants :
- $\mathscr{P}_1$ d'équation $x + y - z = 0$
- $\mathscr{P}_2$ d'équation $2x + y + z - 3 = 0$,
- $\mathscr{P}_3$ d'équation $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

1. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'interseclion, notée Δ.
2. En déduire la nature de l'intersection $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3$.

XVIII) Pondichéry avril 2008

On considère un tétraèdre ABCD.
On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes [AB], [CD], [BC], [AD], [AC] et [BD].
On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.



1. Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.

   Dans la suite de l'exercice, on suppose que AB = CD, BC = AD et AC = BD.
   (On dit que le tétraèdre ABCD est équifacial, car ses faces sont isométriques).

2. **a.** Quelle est la nature du quadrilatère IKJL ? Préciser également la nature des quadrilatères IMJN et KNLM.

   b. En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

3. **a.** Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).

   b. Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB). Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).

   c. Montrer que G appartient aux plans médiateurs de [AB] et [CD].

   d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD ?

XIX) Amérique du Sud novembre 2007

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère le point A de coordonnées $(-2\ ;\ 8\ ;\ 4)$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1\ ;\ 5\ ;\ -1)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives $x - y - z = 7$ et $x - 2z = 11$.
   Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants. On donnera une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée (d').
   Montrer que le vecteur de coordonnées $(2\ ;\ 1\ ;\ 1)$ est un vecteur directeur de (d').

3. Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

4. On considère le point H de coordonnées $(-3\ ;\ 3\ ;\ 5)$ et le point H$'$ de coordonnées $(3\ ;\ 0\ ;\ -4)$.

   a. Vérifier que H appartient à (d) et que H$'$ appartient à (d').

   b. Démontrer que la droite (HH$'$) est perpendiculaire aux droites (d) et (d').

   c. Calculer la distance entre les droites (d) et (d'), i.e la distance HH$'$.

5. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MH'} \cdot \overrightarrow{HH'} = 126$.

XX) Métropole juin 2008

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

$$A(1\ ;\ 1\ ;\ 0), B(1\ ;\ 2\ ;\ 1) \text{ et } C(3\ ;\ -1\ ;\ 2).$$

1. **a.** Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne
   $2x + y - z - 3 = 0$.

2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + 2y - z - 4 = 0$ et $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.
   Démontrer que l'intersection des plane (P) et (Q) est une droite $(\mathscr{D})$, dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2+t \\ y & = & 3 \\ z & = & t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

3. Quelle est l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) ?