I) Pondichéry avril 2013 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On note i le nombre complexe tel que $\text{i}^2 = -1$.
On considère le point A d'affixe $z_\text{A} = 1$ et le point B d'affixe $z_\text{B} = \text{i}$.
À tout point M d'affixe $z_\text{M} = x + \text{i}y$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M′ d'affixe $z_{\text{M}'} = -\text{i}z_\text{M}$.
On désigne par I le milieu du segment [AM].

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM′ (propriété 1) et que BM′ = 2OI (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend
$z_\text{M} = 2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

a. Déterminer la forme algébrique de z_M.

b. Montrer que $z_{\text{M}'} = -\sqrt{3} - \text{i}$.
Déterminer le module et un argument de $z_{\text{M}'}$.

c. Placer les points A, B, M, M′ et I dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ en prenant 2 cm pour unité graphique.
Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

2. On revient au cas général en prenant $z_\text{M} = x + \text{i}y$ avec $y \neq 0$.

a. Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.

b. Déterminer l'affixe du point M′ en fonction de x et y.

c. Écrire les coordonnées des points I, B et M′.

d. Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM′.

e. Montrer que BM′ = 2OI.

II) Un Exercice type Bac

Exercice 1 :

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : **(2 points)**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

Les solutions seront données sous forme algébrique.

$$(\mathrm{E}_1) : 3iz + 2 = z - i \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{E}_2) : 12z^2 + 5z + 1 = 0$$

Partie B : **(8 points)**

On définit la fonction polynôme f sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = z^3 - \left(2 + i\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1 + i\sqrt{2}\right)z - 2i\sqrt{2}$$

1. **a.** Montrer que si z est un nombre imaginaire pur, noté $z = iy$ (avec $y \in \mathbb{R}$), alors

$$f(iy) = 2y\left(y - \sqrt{2}\right) + i\left(-y^3 + \sqrt{2}y^2 + 2y - 2\sqrt{2}\right)$$

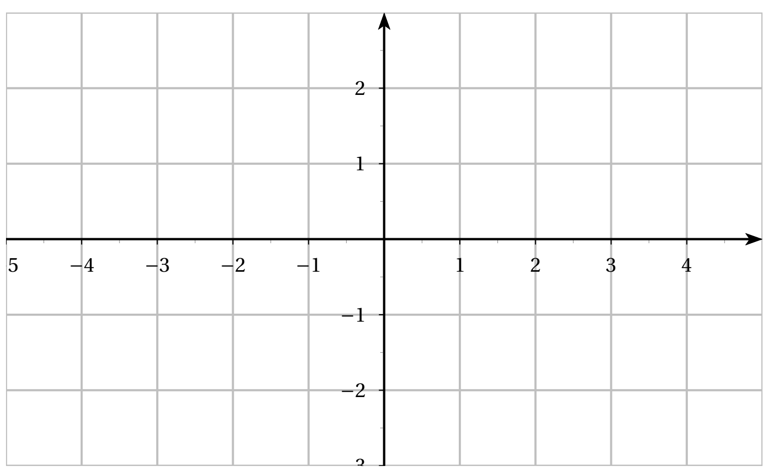
b. En déduire que l'équation $f(z) = 0$ possède exactement une solution imaginaire pure, que l'on précisera.

2. **a.** Trouver deux réels a et b tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait :

$$f(z) = (z^2 + az + b)\left(z - i\sqrt{2}\right)$$

b. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$.

3. **a.** Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{u}; \vec{v})$, les images des points A, B et C des solutions de l'équation $f(z) = 0$. *On notera la cohérence ...*



b. **Bonus :** Calculer $|z_A|$, $|z_B|$ et $|z_C|$.

En déduire le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice(s) du livre : Déclic : Puis voir les exercices proposés dans le livre, notés type bac, car ils sont bien. L'état d'esprit sur ce chapitre a trop changé pour pouvoir proposer des annales judicieuses, en plus de celles déjà traitées ...

n° 78-79 p 247 (déjà traités) + 82-84-85-88-89-92 p 248 (et suivantes)