Correction des Méthodes
Amérique du Nord mai 2013

Exercice 1 : **Commun à tous les candidats** **5 points**

1. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et on dit qu'elles ne sont pas proportionnelles.

2. **a.** On calcule les produits scalaires de $\vec{u}$ avec $\overrightarrow{AB}$ et avec $\overrightarrow{AC}$.
Les deux doivent être nuls pour conclure que Δ est orthogonale à (ABC).

   b. On sait du coup que l'équation de (ABC) est du type $2x - y + 3z + d = 0$.
On trouve d en prenant un point de (ABC), par exemple A et en disant que ses coordonnées vérifient l'équation de (ABC). On trouve (ABC) : $2x - y + 3z + 1 = 0$

   c. On sait que $\Delta : \begin{cases} x = x_D + 2t \\ y = y_D - t \\ z = z_D + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et on remplace.

   d. Les coordonnées (X, y, z) de H vérifient les équations de (ABC) et de Δ, donc on doit résoudre un système à 4 équations et 4 inconnues.
On commence par trouver t en remplaçant dans l'équation de (ABC) les x, y et z par leur expression en fonction de t $t = -2$
On remplace ensuite t par -2 dans les équations de la représentation paramétrique de Δ pour trouver x, y zet z H$(3, 1, 2)$

3. **a.** On vérifie que les vecteurs $\vec{v}(1, 1, 1)$ et $\vec{w}(1, 4, 0)$ normaux respectivement aux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas colinéaires. Donc les plans ne sont pas parallèles : ils sont sécants.

   b. On peut vérifier que d appartient aux deux plans en remplaçant dans chacune des équations des plans les x, y, z par leur expression en fonction de t dans la représentation paramétrique de d et en vérifiant qu'on a l'égalité voulue.
Exemple pour $\mathscr{P}_1$: $-4t - 2 + t + 3t + 2 = 0$ donc $d \in \mathscr{P}_1$
OU : on cherche à résoudre le système formé par les deux équations de plan, en fonction de y, en posant $y = t$.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 4y + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = -y \\ x = -4y - 2 \end{cases}$$

En posant $y = t$ on a donc $\begin{cases} x = -4t - 2 \\ z = -t - (-4t - 2) = 3t + 2 \end{cases}$ D'où la représentation paramétrique de d donnée.

   c. $d // \text{(ABC)}$ si et seulement si un vecteur directeur de d est orthogonal à un vecteur normal de (ABC). Sinon ils sont sécants (se représenter la situation avec une table r le plan et des stylos pour les vecteurs).
On calcule donc le produit scalaire de $(-4, 1, 3)$ et de $\vec{u}$. (ABC) et d sont parallèles.

Exercice 2 : **5 points**

1. **a.** On peut se faire une trace écrite de l'algorithme sur son brouillon : $n = 3$ et $u = 1$
On entre dans la boucle Pour. i prendra successivement les valeurs 1, 2 et 3 car $n = 3$ Puis $i = 1$ donc $u = \sqrt{2 \times 1} = \sqrt{2}$
Puis $i = 2$ donc $u = \sqrt{2 \times \sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{2}}$
Puis $i = 3$ donc $u = \sqrt{2 \times \sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$
Comme $i = n$, on sort de la boucle Pour et on affiche u. A la calculatrice on trouve $u \simeq 1.8340$.

b. Pour un n donné en entrée, l'algorithme calcule tous les termes de la suite (u_n) jusqu'à u_n qu'il affiche.

c. On conjecture que (u_n) est croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

2. **a.** On raisonne par récurrence.
Pour $n = 0$, $u_0 = 1 \in]0;2]$ donc la propriété est vrai au rang 0.
On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $0 < u_k \leq 2$.
Alors $0 < 2u_k \leq 4 \iff 0 < \sqrt{2u_k} \leq \sqrt{4} \iff 0 < u_{k+1} \leq 2$.
Donc la propriété est héréditaire. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a bien $0 < u_n \leq 2$.

b. On peut refaire une récurrence en considérant la propriété (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
L'initialisation consiste à vérifier que $u_0 < u_1$.
L'hérédité suit le même shéma que celle de la question 2a).
OU : On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ (un peu compliqué car il faut penser à factoriser par $\sqrt{u_n}$ et utiliser le fait que $u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).
OU : Comme $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on compare la fraction $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (un peu moins compliqué, mais il faut penser à simplifier par $\sqrt{u_n}$ et utiliser $u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).
Vue la question précédente, on s'attend sans doute à cette dernière méthode, mais toutes conviennent.

c. Pas besoin de réfléchir, la question est systématique avec les deux précédentes :
(u_n) est croissante et majorée, donc elle converge (vers un réel inférieur ou égal à 2).

3. **a.** $v_0 = \ldots = -\ln(2)$
De plus

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) - \ln(2)\\
&= \ln\left(\sqrt{2u_n}\right) - \ln(2)\\
&= \frac{1}{2}\ln(2u_n) - \ln(2)\\
&= \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(u_n) - \ln(2)\\
&= \frac{1}{2}\ln(u_n) - \frac{1}{2}\ln(2)\\
&= \frac{1}{2}(\ln(u_n) - \ln(2))\\
&= \frac{1}{2}v_n
\end{aligned}$$

On conclut.

b. Comme (v_n) est géométrique, on sait que $v_n = v_0 \times q^n = -\ln(2) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ (sans oublier les parenthèses !) que l'on peut encore écrire pour faire bonne impression $v_n = -\dfrac{\ln(2)}{2^n}$.
De plus on a $v_n = \ln(u_n) - \ln(2) \iff v_n = \ln\left(\dfrac{u_n}{2}\right) \iff e^{v_n} = \dfrac{u_n}{2} \iff 2e^{v_n} = u_n$.
Donc $u_n = 2e^{-\ln(2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ (que l'on peut écrire mieux, mais cela ne présente pas particulièrement d'intérêt)

c. *Il est logique d'utiliser la forme précédente pour déterminer cette limite (même si cette forme parait compliquée, on ne vous la fait chercher que dans l'objectif de l'utiliser pour la limite).*
On s'y prend donc petit à petit pour ne pas se faire peur.
On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < 0 < 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln(2) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2e^{-\ln(2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2 \times e^0 = 2$.

d.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant que ($u \leq 1.999$) Faire :
	Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Affecter à n la valeur $n+1$
	Fin de Tant que
Sortie :	Afficher n

Remarquons que cet algorithme s'arrêtera forcément.
La suite (u_n) *est convergente vers 2 (cf 3c). Par définition de la limite, on sait donc qu'il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite seront dans l'intervalle* $[1.999; 2.001]$ *et même dans* $[1.999; 2]$ *car la suite est majorée par 2. Donc notre boucle Tant que s'arrêtera (ce qui n'aurait pas forcément été le cas avec une valeur autre que* 1.999*, comme* 2 *par exemple).*

Remarquons aussi que le rang renvoyé par l'algorithme est certes le premier tel que $u_n > 1.999$*, mais également celui à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à* 1.999*, puisque la suite* (u_n) *est croissante (cf 2b).*

Exercice 3 : **5 points**

Partie A

1. A la calculatrice (plus simple), on trouve $P(390 \leqslant X \leqslant 410) \simeq 0.637$ en tapant :

   TI82 : `NormalFRep(390,410,400,11)` TI89 : `normFdR(390,410,400,11)`

   OU on utilise la table de valeurs et un dessin : $P(390 \leqslant X \leqslant 410) = P(X \leq 410) - P(X \leq 390) \simeq 0.636$

2. On cherche $p = P(X \geq 385) = 1 - P(X < 385) = 1 - P(X \leq 385) \simeq 0.914$ grâce à la table de valeurs (plus simple).
   OU à la calculatrice et avec un dessin, on a $p = P(X \geq 385) = \dfrac{1}{2} + P(385 \leq X \leq 400) \simeq 0.914$

3. L'indication nous permet de savoir que l'on doit trouver σ tel que $\dfrac{385-400}{\sigma} = -1.751 \iff \sigma = 8.6$.
   Mais expliquons cela comme on l'attend de vous.
   On appelle Y la variable aléatoire qui modélise la masse d'un pain suivant une loi normale $\mathcal{N}(400; \sigma^2)$.
   On cherche σ tel que
   $$P(Y \geq 385) = 0.96 \iff \dots \iff P(Y \leq 385) = 0.04$$

$$\begin{aligned} P(Y \geq 385) = 0.96 \quad &\iff \quad \dots \iff P(Y \leq 385) = 0.04 \\ &\iff \quad P\left(\frac{Y-400}{\sigma} \leq \frac{385-400}{\sigma}\right) = 0.04 \\ &\iff \quad P\left(Z \leq \frac{385-400}{\sigma}\right) = 0.04 \quad \text{où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \end{aligned}$$

   D'après l'énoncé (ou grâce à la calculatrice), on a donc σ tel que $\dfrac{385-400}{\sigma} = -1.751 \iff \sigma = 8.6$.

   TI 82 : `FracNormale(0.04)` TI 89 : `invNorm(0.04)`

Partie B

1. On vérifie les conditions pour faire bonne impression : $n = 300 \geq 30$, $np = 300 \times 0.96 \geq 5$ et $n(1-p) = 300 \times 0.04 \geq 5$ On utilise la formule $\mathrm{I} = \left[p - 1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$
   On trouve $\mathrm{I} \simeq [0.974; 0.982]$ (arrondis non précisés).
   On interprète pour donner bonne impression : ainsi, environ 95% des échantillons de taille 300 ont une proportion de pains commercialisables dans l'intervalle I.
2. La fréquence observée sur l'échantillon est $\frac{283}{300} \simeq 0.94 \in \mathrm{I}$ donc on peut penser (plutôt que décider) que l'objectif est atteint.

Partie C

1. La suite nous indique que l'on doit trouver $\lambda \simeq 0.003$. Voyons comment.
   On nous donne $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geq 30) = 0.913$.
   Or T suit une loi exponentielle de paramètre λ. Donc $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geq a) = e^{-\lambda a}$.
   Ainsi on a $e^{-\lambda \times 30} = 0.913 \iff -30\lambda = \ln(0.913) \iff \lambda = -\frac{\ln(0.913)}{30} \simeq 0.003$
2. On calcule $\mathrm{P}_{(\mathrm{T}\geq 60)}(\mathrm{T} \geq 90) = \mathrm{P}(\mathrm{T} \geq 30) = e^{-0.003\times 30} \simeq 0.914$
   car la loi exponentielle est une loi sans mémoire ***OU*** *on utilise la formule de probabilité conditionnelle*
3. Prenons une année non bissextile, cela ne devriat pas changer grand chose. On a $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geq 365) \simeq 0.335$.
   donc le vendeur a menti.
   On cherche alors α tel que $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geq \alpha) = 0.5 \iff e^{-0.003\alpha} = 0.5 \iff \ldots \iff \alpha \simeq 231.049$.
   Il y a une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant 231 jours environ.

Exercice 4 : **5 points**

1. **a.** On a $\lim_{x\to 0} 1 + \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0} x^2 = 0^+$ Donc $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ (ce n'est pas une FI !!)

   b. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ or $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{\ln(x)}{x}$ Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 + 0 \times 0 = 0$

   c. $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ donc $x = 0$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}$.
   $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc $y = 0$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

2. **a.** On pose $u(x) = 1 + \ln(x)$ et $v(x) = x^2$
   Alors $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 2x$
   et $f = \frac{u}{v}$ donc $f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
   Donc $f'(x) = \ldots = \frac{x - 2x(1+\ln(x))}{x^4} = \ldots = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}$

   b. $-1 - 2\ln(x) > 0 \iff -1 > 2\ln(x) \iff -\frac{1}{2} > \ln(x) \iff e^{-\frac{1}{2}} > x$

   b. et c. On a $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1+\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{1-\frac{1}{2}}{e^{-1}} = \frac{e}{2}$ Donc on a le tableau

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
Signe de x	0	$+$		$+$	
Signe de $1-2\ln(x)$		$+$	0	$-$	
Signe de $f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	0

3. **a.** On utilise le TVI : 3 hypothèses à préciser !

- f est continue sur $]0;+\infty[$ comme composées de fonctions continues.
- f est strictement croissante sur $\left]0;e^{-0.5}\right[$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) < 0 < f\left(e^{-0.5}\right)$

D'après le corollaire du TVI, il existe un unique $\alpha \in]0;e^{-0.5}[$ tel que $f(x)=0$, donc tel que $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses.
De plus, sur $\left]e^{-0.5};+\infty\right[$, il est clair que f est strictement positive. Donc il n'y a pas d'autre point d'intersection entre $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.
Trouvons ce point : pour cela il faut résoudre l'équation $f(x)=0$.
Or $f(x)=0 \iff 1+\ln(x)=0 \iff \ln(x)=-1 \iff x=\dfrac{1}{e}$.
Donc le point d'intersection a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{e};0\right)$.

b. On en déduit le tableau :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
Signe de $f(x)$	||	$-$	0	$+$	

4. **a.** On est tout d'abord content, car l'on retrouve $\dfrac{1}{e}$ calculé à la question précédente.
Ensuite remarquons que $n \geq 1 \geq \dfrac{1}{e}$.
Pour tout $x \geq \dfrac{1}{e}$ on sait que $f(x)\geq 0$ donc $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{n} f(x)dx$ est positive.
De plus, $\dfrac{1}{e} \leq x \leq n \iff 0 \leq f(x) \leq \dfrac{e}{2} \iff 0 \leq \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{2} f(x)dx \leq \int_{\frac{1}{e}}^{2} \frac{e}{2}dx \iff 0 \leq \mathrm{I}_2 \leq \frac{e}{2}\times\left(2-\frac{1}{e}\right) = e-\frac{1}{2}$

b. $\mathrm{I}_n = \mathrm{F}(n)-\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{-2-\ln(n)}{n} - \dfrac{-2-\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} = \dfrac{-2-\ln(n)}{n} + \left(2+\ln(e^{-1})\right)\times e = \dfrac{-2-\ln(n)}{n}+e$

c. Ainsi comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = e$. L'aire converge vers e.