CORRECTION DEVOIR D'ENTRAÎNEMENT PONDICHÉRY 2013

Exercice 1 : $h(t)=\dfrac{a}{1+be^{-0.04t}}$ $\quad a>0\,,b>0 \quad h(0)=0.1 \quad \lim\limits_{t\to+\infty} h(t)=2$

PARTIE A.

On sait que $\quad h(0)=0.1 \iff \dfrac{a}{1+be^{0}}=0.1 \iff \dfrac{a}{1+b}=0.1 \overset{b\neq -1}{\iff} a=0.1(1+b)$

De plus $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0.04t}=0 \qquad$ Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)=\dfrac{a}{1+b\times 0}=a. \qquad$ D'où $\boxed{a=2 \text{ et } b=19}$

PARTIE B.

$$f(t)=\frac{2}{1+19\mathrm{e}^{-0.04t}} \quad \text{pour } t\in[0;250]$$

On est content, car les valeurs trouvées pour a et b sont celles de la fonction f. On sait donc que l'on a juste.

1. On pose $\;v(t)=1+19\mathrm{e}^{-0.04t}\;$ alors $\;v'(t)=19\times(-0.04)\mathrm{e}^{-0.04t}=-0.76\mathrm{e}^{-0.04t}$

   Comme $\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2} \qquad$ On a $\;f'(t)=\ldots \qquad$ D'où $\boxed{f'(t)=\dfrac{1.52\mathrm{e}^{-0.04t}}{\left(1+19\mathrm{e}^{-0.04t}\right)^2}}$

   Il est clair que $f'(t)>0$ pour tout $t\in[0;250] \qquad$ Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissant sur } [0;250]}$

2. On cherche t tel que $f(t)>1.5$ *(en espérant trouver une valeur plus petite que 250, pour que f soit bien définie).* Comme f est strictement croissante sur $[0;250]$, il suffit de résoudre :

$$\begin{aligned}
f(t)=1.5 &\iff \frac{2}{1+19\mathrm{e}^{-0.04t}}=\frac{3}{2}\\
&\iff \frac{4}{3}=1+19\mathrm{e}^{-0.04t}\\
&\iff \ldots\ldots\ldots\ldots \iff \frac{1}{3\times 19}=\mathrm{e}^{-0.04t} \quad \text{(tout est bien positif)}\\
&\iff \ln(1)-\ln(57)=-0.04t\\
&\iff \ldots\ldots\ldots\ldots \iff t=\frac{\ln(57)}{0.04}
\end{aligned}$$

   Donc il faut un peu plus de $\boxed{101 \text{ jours}}$ pour que le plan atteigne 1.5 m de hauteur.
   L'énoncé est bancal, car il n'est pas précisé que les unités pour les fonctions h et f sont les mêmes ...

3. **a.** Pour tout $t\in[0;250]$ on a $\;f(t)=\dfrac{2}{1+19\mathrm{e}^{-0.04t}}=\dfrac{2}{1+19\mathrm{e}^{-0.04t}}\times\dfrac{\mathrm{e}^{-0.04t}}{\mathrm{e}^{-0.04t}}=\ldots\ldots=\dfrac{2\mathrm{e}^{-0.04t}}{\mathrm{e}^{0.04t}+19}$

   $\mathrm{F}(t)=50\ln\left(e^{0.04t}+19\right) \qquad$ Regardons maintenant si $\mathrm{F}'(t)=f(t)$ pour tout $t\in[0;250]$.
   On pose $\;u(t)=\mathrm{e}^{0.04t}+19 \qquad$ Alors $u'(t)=0.04\mathrm{e}^{0.04t}$

   Comme $(\ln(u))'=\dfrac{u'}{u} \qquad$ pour tout $t\in[0;250]$, on a bien $\boxed{\mathrm{F}'(t)=50\times\dfrac{0.04\mathrm{e}^{0.04t}}{e^{0.04t}+19}=\ldots\ldots=f(t)}$

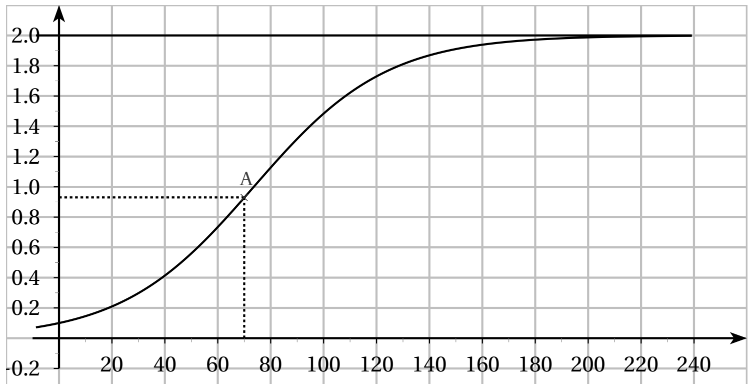
   b. On sait que la valeur moyenne de f sur $[50;100]$, que l'on notera μ est :

$$\mu=\frac{1}{100-50}\int_{50}^{100} f(t)\,dt=\frac{1}{50}\times(\mathrm{F}(100)-\mathrm{F}(50))=\ldots\ldots=\ln\left(\frac{e^4+19}{e^2+19}\right)\simeq 1.03$$

   Entre le 50^e et le 100^e jour, le plant a une hauteur moyenne d'environ $\boxed{1.03 \text{ mètre}}$

4. La vitesse de croissance est donc maximale quand la dérivée de f l'est.
Le nombre dérivé de la fonction f en un point d'abscisse t étant le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en ce même point, cela se traduit sur le graphique par une pente maximale de la courbe représentative de f.

La pente maximale est pour $\boxed{t \simeq 70 \text{ jours}}$, ce qui correspond à une hauteur d'environ $\boxed{0.93 \text{ mètre}}$.
En étudiant les variations de la fonction f' (donc en calculant f'' et en dressant le tableau de variations de f', on trouve $t \simeq 73,6$ jours et $f(t) \simeq 0.99$ mètre.



Exercice 2 :

1. On peut déjà constater que la première proposition est une représentation paramétrique de droite, donc ce ne peut pas être la réponse.
Ensuite, il existe plusieurs méthodes pour trouver la bonne réponse à cette question.
Une Condition Nécessaire et Suffisante pour qu'une représentation paramétrique donnée soit celle de (P) est que si l'on remplace x , y et z dans l'équation cartésienne de (P) par leur expression en fonction de t et t' , l'égalité est vérifiée.
On peut donc le faire pour chacune jusqu'à trouver celle qui remplit la CNS. Heureusement, il s'agit de la $\boxed{\text{réponse b)}}$ donc on a eu peu de calculs à faire : $t + 2t' - 2(1 - t + t') + 3(-1 - t) + 5 = \ldots\ldots = 0$.
On aurait aussi pu vérifier si les points connus de chacune des représentations paramétriques appartenaient bien à (P). Heureusement, là encore, il ne restait en liste que la réponse b), car $(0,1,-1) \in$ (P), tandis que ni $(0,1,1)$, ni $(1,1,-1)$ ne vérifient l'équation cartésienne de (P).
Remarquons que cette méthode ne fait qu'éliminer des réponses, sans déterminer la bonne (*condition nécessaire d'appartenance, mais non suffisante*), donc si on avait eu plusieurs possiblités restantes, il aurait fallu approfondir notre recherche pour déterminer la bonne.

2. On peut chercher une éventuelle intersection, mais commençons plutôt par regarder les positions relatives de (D) et (P) (*on ne cherchera une intersection que si on sait déjà qu'elle existe*).
Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(1,-1,-1)$ et un vecteur normal de (P) est $\vec{n}(1,-2,3)$.
On constate que $\vec{u} \cdot \vec{n} = \ldots\ldots = 0$. Donc $\vec{u} \perp \vec{n}$, ce qui signifie que (D) et (P) sont parallèles.
Il ne reste donc que les choix c) et d) à départager.
Or un point de (D) est $A(-2,0,-1)$ et ses coordonnées vérifient l'équation de (P).
Donc (D) et (P) sont parallèles avec un point commun : (D) est une droite du plan (P) $\boxed{\text{réponse c)}}$

3. Un vecteur directeur de (MN) est $\overrightarrow{MN}(2;-4;6)$. Or $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MN} = \ldots\ldots = 0$. Donc (MN) $\perp$ (D). $\boxed{\text{réponse a)}}$

4. (S) a pour couple de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}(2,-2,3)$.
On sait déjà que $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ mais $\vec{n} \cdot \vec{v} = \ldots\ldots \neq 0$ donc (S) et (P) ne sont pas parallèles.
Il est clair que $\vec{n}$ n'est colinéaire ni à $\vec{u}$, ni à $\vec{v}$ sont (S) et (P) ne sont pas orthogonaux.
On voit facilement que les coordonnées de M ne vérifient pas l'équation de (P).
La bonne réponse ne peut donc être que la $\boxed{\text{réponse b)}}$ Vérifions :

- Δ a pour vecteur directeur $\vec{u}$ donc $\Delta //$ (D) d'où $\Delta //$ (P)
  De plus le point $B(0;-2;3)$ de Δ vérifie l'équation cartésienne de (P), donc Δ est une droite de (P).
- Δ a pour vecteur directeur $\vec{u}$ donc $\Delta //$ (S).
  De plus, le point $C(-2;0;-1)$ de (S) vérifie la représentation paramétrique de Δ pour $t=-2$.
  Donc Δ est une droite de (S).
- On a déjà dit que (P) et (S) n'étaient pas parallèles, donc Δ est la droite d'intersection de (S) et (P).

Exercice 3 :

1. **a.**

$$\begin{aligned} z_M &= 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= \ldots\ldots = 1 - i\sqrt{3} \end{aligned}$$

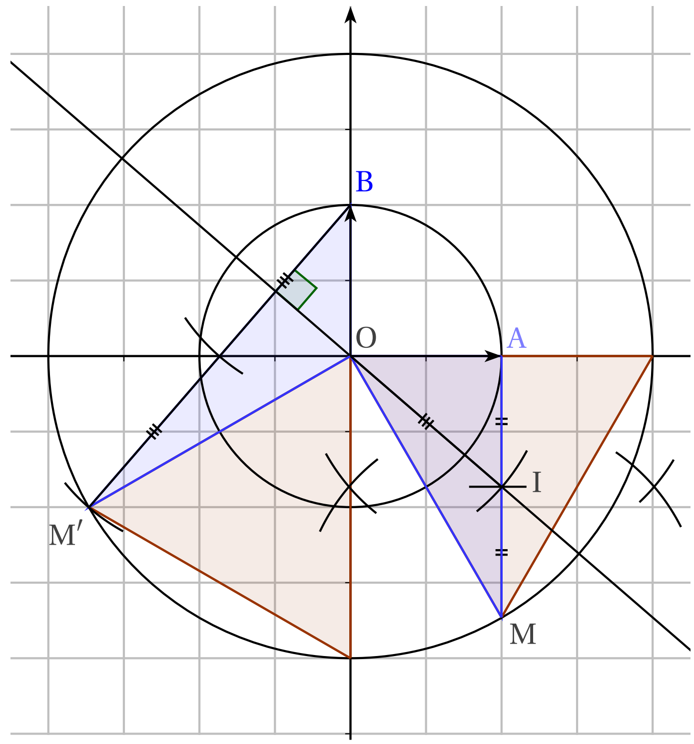
b. $z_{M'} = -i\left(1-i\sqrt{3}\right) = \ldots\ldots = -\sqrt{3} - i$

c.

$$\begin{aligned} z_{M'} &= -i \times 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &= 2e^{-i\frac{5\pi}{6}} \end{aligned}$$

Donc un argument de $z_{M'}$ est $-\dfrac{5\pi}{6}$ et son module est 2.

d.



2. **a.** $z_I = \dfrac{z_A + z_M}{2} = \ldots\ldots = \dfrac{1+x}{2} + i\dfrac{y}{2}$

b. $z_{M'} = -iz_M = -ix + y = y - ix$

c. $I\left(\dfrac{1+x}{2};\dfrac{y}{2}\right)$, $B(0,1)$ et $M'(y,-x)$

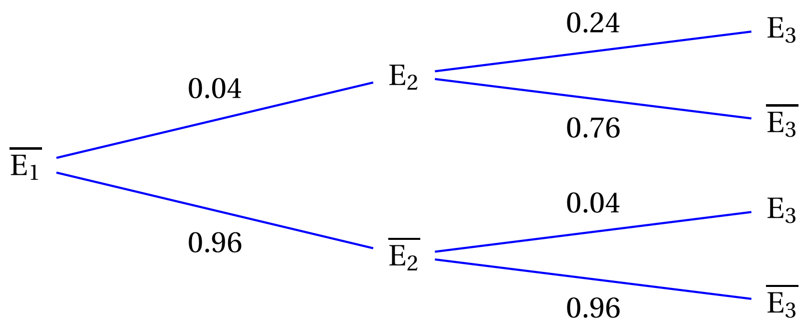
d. $\overrightarrow{OI}\left(\dfrac{1+x}{2};\dfrac{y}{2}\right)$ et $\overrightarrow{BM'}\left(y,-x-1\right)$.

Or $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BM'} = \ldots\ldots = 0$. Donc $(OI) \perp (BM')$. (OI) est bien une hauteur du triangle BOM'.

e. $OI^2 = \left(\dfrac{1+x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left((1+x)^2 + y^2\right)$ $BM'^2 = y^2 + (-x-1)^2 = \ldots\ldots = 4OI^2$ Donc $BM' = 2OI$.

Exercice 4 :

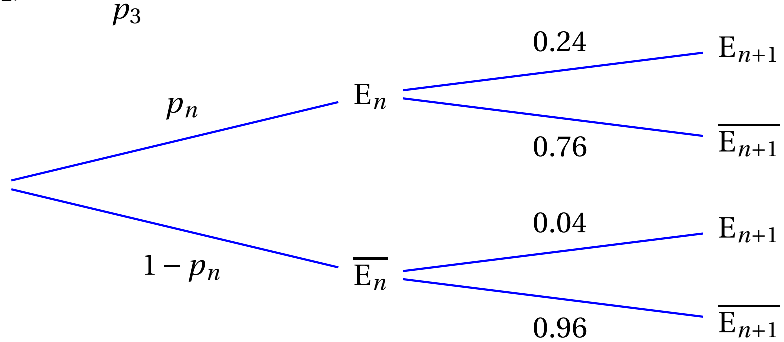
1. On a l'arbre suivant :



a. D'après la formule des probabilités totales on a $p_3 = P(E_3) = 0.04 \times 0.24 + 0.96 \times 0.04 = 0.048$

b. On cherche $P_{E_3}(E_2) = \dfrac{P(E_3 \cap E_2)}{p_3} = \ldots\ldots = 0.2$

2. a.



b. D'après la formule des probabilités totales on a

$$p_{n+1} = P(E_{n+1}) = 0.24p_n + 0.04(1-p_n) = \ldots\ldots = 0.2p_n + 0.04$$

c.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - 0.05 && \text{par définition de la suite } (u_n)\\
&= 0.2p_n + 0.04 - 0.05 && \text{d'après ce qui précède}\\
&= 0.2(u_n + 0.05) - 0.01 && \text{par définition de la suite } (u_n)\\
u_{n+1} &= \ldots\ldots = 0.2u_n
\end{aligned}$$

Donc (u_n) est géométrique de raison $r = 0.2$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0.05 = -0.05$
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0.05 \times 0.2^{n-1}$
Et donc $p_n = -0.05 \times 0.2^{n-1} + 0.05$.

d. L'affichage J est le rang du premier terme de la suite (p_n) inférieur à $0.05 - 10^{-K}$, où K est un entier naturel choisi par l'utilisateur.
On sait que pour tout $n \geq 1$ on a $p_n = 0.05 - 0.05 \times 0.2^{n-1}$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.2^{n-1} = 0$ car $-1 < 0.2 < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0.05$.
Autrement dit, pour tout $K \in \mathbb{N}$, il existe un rang à partir duquel

$$|p_n - 0.05| < 10^{-K} \iff -10^{-K} < p_n - 0.05 < 10^{-K} \iff 0.05 - 10^{-K} < p_n < 0.05 + 10^{-K}$$

Donc on est sûr que la boucle s'arrêtera.

a. On répète 220 fois l'épreuve de Bernoulli qui consiste à regarder si un salarié est malade (Succès de probabilité $p = 0.05$) ou non (Echec) une semaine donnée.
X compte le nombre de succès de l'expérience, donc $X \hookrightarrow B(220, 0.05)$
On sait que $\mu = E(X) = np = 11$ et $V(x) = np(1-p) = 10.45$ donc $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{10.45}$

b. On cherche

$$\begin{aligned}
P(7 \leq X \leq 15) &= P\left(\frac{7-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{15-\mu}{\sigma}\right)\\
&\simeq P(-1.24 \leq Z \leq 1.24)\\
&= P(Z \leq 1.24) - P(Z < -1.24)\\
&= 0.892 - 0.108 = 0.784 \qquad \text{Donc } P(7 \leq X \leq 15) \simeq 0.78
\end{aligned}$$