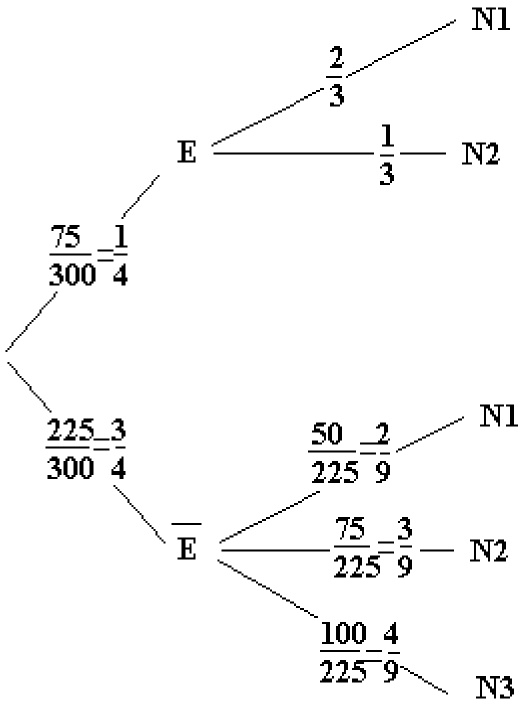
Correction du bac blanc n°7

Exercice 1 : **Beaucoup d'erreurs de formules avec les lettres, même si les calculs sont juste => Problème de sens !!**

1.



2. a. $P(E\cap N_2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

b. $P(N_1)=P(E\cap N_1)+P(\overline{E}\cap N_1)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{9}$

$P(N_1)=\frac{2}{12}+\frac{6}{36}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$P(N_2)=P(E\cap N_2)+P(\overline{E}\cap N_2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{9}$

$P(N_2)=\frac{1}{12}+\frac{9}{36}=\frac{1}{12}+\frac{3}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$P(N_3)=1-P(N_1)-P(N_2)=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

Les événements $N_{1,}$ N_2 et N_3 sont donc bien équiprobables.

c. $P_{N_2}(E)=\frac{P(E\cap N_2)}{P(N_2)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{12}\times\frac{3}{1}=\frac{1}{4}$

3. a. Choisir une personne au hasard et regarder si elle va au deuxième étage (Succès) ou non (Echec) consitute une épreuve de Bernoulli que l'on répète 20 fois de manière identique et indépendante. X compte le nombre de succès (de probabilité 1/3), donc X suit une loi **binomiale** de paramètres $n=20$ et $p=\frac{1}{3}$

b. $P(X=5)=\binom{5}{20}\times(\frac{1}{3})^5\times(\frac{2}{3})^{15}=15504\times(\frac{1}{3})^5\times(\frac{2}{3})^{15}\approx 0{,}1457$ **Formule à connaître par coeur !!**

c. $E(X)=n\times p=\frac{20\times 1}{3}=\frac{20}{3}$. En moyenne, sur 20 personnes, $\frac{20}{3}$ vont au second niveau.

4. La probabilité que personne n'aille au second étage vaut $P(X=0)=\binom{n}{0}\times(\frac{1}{3})^0\times(\frac{2}{3})^n=1\times 1\times(\frac{2}{3})^n=(\frac{2}{3})^n$

donc la probabilité qu'au moins une personne aille au second niveau vaut $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-(\frac{2}{3})^n$

On cherche n tel que $1-(\frac{2}{3})^n\geq 0{,}99$ **Equation que vous savez résoudre désormais !!**

Ainsi $1-(\frac{2}{3})^n\geq 0{,}99\Leftrightarrow -(\frac{2}{3})^n\geq -0.01\Leftrightarrow(\frac{2}{3})^n\leq 0{,}01$ **Attention au changement de sens !!**

$\Leftrightarrow \ln((\frac{2}{3})^n)\leq \ln(0{,}01)$ **car la fonction ln conserve l'ordre**

$\Leftrightarrow n\ln(\frac{2}{3})\leq \ln(0{,}01)\Leftrightarrow n\geq\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(\frac{2}{3})}$ **car** $\ln(\frac{2}{3})<0$!!

$\Leftrightarrow n\geq 11{,}35$

Il faut donc au moins 12 personnes pour que cette probabilité soit supérieure à 0,99.

Attention : à la calculatrice, vous pouviez trouver avec un tableau de valeurs qui vous donne le premier n qui marche, ce qui répond à cette question, mais on si on avait demandé le premier n *à partir duquel la proba est toujours supérieure à 0.99*, la calculatrice ne suffit pas (elle ne justifie pas que c'est toujours vrai après 12), et vous devez résoudre l'inéquation !

Exercice 2 : **Partie A**

1. $\vec{IJ}(-1\,;\frac{1}{3}\,;1)$ donc une réprésentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\begin{cases} x=1-t \\ y=\frac{1}{3}+\frac{t}{3} \quad t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$

2. $\vec{KL}(a-\frac{3}{4}\,;1\,;-1)$
et $K(\frac{3}{4}\,;0{,}1)\in(KL)$
donc une réprésentation paramétrique de la droite (KL) est : $\begin{cases} x=\frac{3}{4}+t(a-\frac{3}{4}) \\ y=t \\ z=1-t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

3. (IJ) et (KL) sont sécantes **ssi** le système $\begin{cases} 1-t=\frac{3}{4}+t'(a-\frac{3}{4}) \\ \frac{1}{3}+\frac{t}{3}=t' \\ t=1-t' \end{cases}$ a un unique couple (t,t') solution.

Or $\begin{cases} 1-t=\frac{3}{4}+t'(a-\frac{3}{4}) \\ \frac{1}{3}+\frac{t}{3}=t' \\ t=1-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-t=\frac{3}{4}+t'(a-\frac{3}{4}) \\ 1+t=3t' \\ t=1-t' \end{cases}$

On a donc nécessairement $1+1-t'=3t' \quad \Leftrightarrow 2=4t' \quad \Leftrightarrow t'=\frac{1}{2}$ ainsi $t=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Pour que le système ait un couple solution, il faudra enfin que les valeurs de t et t' soient solutions de
$1-t=\frac{3}{4}+t'(a-\frac{3}{4})$ donc que $1-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times(a-\frac{3}{4}) \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{a}{2}-\frac{3}{8} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{3}{8}=\frac{a}{2}$
$\Leftrightarrow \frac{4-6+3}{8}=\frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{8}=\frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{4}=a$ **ce qui est donc *l'unique* valeur possible (en remplaçant directement a, vous vérifiez que cette valeur est possible, mais pas qu'elle est unique).**

Partie B :

1. $\vec{IK}(\frac{-1}{4}\,;-\frac{1}{3}\,;1)$ et $\vec{LJ}(\frac{-1}{4}\,;-\frac{1}{3}\,;1)$ donc $\vec{IK}=\vec{LJ}$ **ce qui équivaut à** IKJL est un parallélogramme.

C'est inadmissible que vous ne sachiez pas encore ce théorème !! Vous en faîtes bien trop en démontrant deux égalités, ce qui montre que vous n'avez pas encore compris le sens de l'égalité pour deux vecteurs ....

2. a. $\vec{n}.\vec{IJ}=8\times(-1)+9\times\frac{1}{3}+5\times1=-8+3+5=0$

$\vec{n}.\vec{IK}=8\times(\frac{-1}{4})+9\times(\frac{-1}{3})+5\times1=-2-3+5=0$ **Attention !! Il faut *deux* vecteurs non colinéaires !!!**

$\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs de (IJK) non colinéaires (leurs cotes sont égales mais pas leurs abscisses) donc $\vec{n}$ est normal au plan (IJK)

b. (IJK) a donc une équation de la forme $8x+9y+5z+d=0$

Or $I\in(IJK)$ donc $8\times1+9\times\frac{1}{3}+5\times0+d=0 \Leftrightarrow 8+3+d=0 \Leftrightarrow d=-11$

D'où l'équation cartésienne de (IJK) : $8x+9y+5z-11=0$

c. On connait l'abscisse et l'ordonnée de $M(1\,;0\,;z_M)$ donc $8\times1+9\times0+5z_M-11=0$
$\Leftrightarrow 5z_M=11-8$
$\Leftrightarrow z_M=\frac{3}{5} \qquad M(1\,;0\,;\frac{3}{5})$

On connait l'abscisse et l'ordonnée de $N(0\,;1\,;z_N)$ donc $8\times0+9\times1+5z_N-11=0$
$\Leftrightarrow 5z_N=11-9$
$\Leftrightarrow z_N=\frac{2}{5} \qquad N(1\,;0\,;\frac{2}{5})$ **Les équations paramétriques de droites étaient une bonne idée, mais fastidieuses ...**

Exercice 3 : **Partie A**

1. $\int_1^x (2-t)dt = F(x)-F(1)$ où F est **une primitive** de $f(x)=2-x$, par exemple $F(x)=2x-\frac{x^2}{2}$

$\int_1^x (2-t)dt = 2x-\frac{x^2}{2}-(2-\frac{1}{2}) = \frac{-x^2}{2}+2x-\frac{3}{2}$ **Certains ne savent toujours pas qu'il faut une primitive, ou l'ordre de la différence .... C'est la base !**

2. $\forall t\geq 1, 0\leq (t-1)^2$

$\Leftrightarrow \forall t\geq 1, 0\leq t^2-2t+1$

$\Leftrightarrow \forall t\geq 1, 2t-t^2\leq 1$

$\Leftrightarrow \forall t\geq 1, 2-t\leq \frac{1}{t}$ car $t>0$

ou encore : $\forall t\geq 1$, on a $2-t\leq \frac{1}{t} \Leftrightarrow 2t-t^2\leq 1$ car $t>0$

$\Leftrightarrow 0\leq t^2-2t+1$

$\Leftrightarrow 0\leq (t-1)^2$ **ce qui est toujours vrai !**

3. $\forall t\geq 1, 2-t\leq \frac{1}{t}$ donc $\forall x\geq 1, \int_1^x (2-t)\,dt \leq \int_1^x \frac{1}{t}dt$ **car l'intégrale conserve l'ordre !**

Ainsi $\forall x\geq 1, -\frac{x^2}{2}+2x-\frac{3}{2}\leq \ln(x)-\ln(1)$ ***et non les primitives, car il faut intégrer sur le même domaine !!***

d'où $\forall x\geq 1, -\frac{x^2}{2}+2x-\frac{3}{2}\leq \ln(x)$

Partie B

1. a. $\int_1^4 (-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2})dt = H(4)-H(1)$ où $H(x)=-\frac{1}{6}x^3+x^2-\frac{3}{2}x$

Donc $\int_1^4 h(x)dx = -\frac{1}{6}\times 4^3+4^2-\frac{3}{2}\times 4-(-\frac{1}{6}\times 1^3+1^2-\frac{3}{2}\times 1) = \frac{-64}{6}+16-6+\frac{1}{6}-1+\frac{3}{2}$

$= -\frac{63}{6}+9+\frac{3}{2} = \frac{-21}{2}+\frac{18}{2}+\frac{3}{2}=0$

b. Cela signifie donc que l'aire comprise sous la courbe de h entre 1 et 3 est égale à l'aire comprise sous la courbe entre 3 et 4.

Quand on parle d'aire sous la courbe, c'est une expression pour dire l'aire comprise entre la courbe de h, les droites d'équation x=1 et x=4 et *l'axe des abscisses* !! Ce n'est pas l'aire *sous* la courbe jusqu'en bas du graphique ! Cela peut être *sur* la courbe ...

2. $f=u\times v$ avec $u(x)=x, u'(x)=1, v(x)=\ln(x)-1, v'(x)=\frac{1}{x}$

donc $f'(x)=1\times(\ln(x)-1)+\frac{x\times 1}{x}=\ln(x)-1+\frac{x}{x}=\ln(x)-1+1=\ln(x)$

Donc *f* est bien une primitive de la fonction *ln*

3. Comme $\forall x\in[1;4]$ on a $h(x)\leq \ln(x)$ alors $D=\int_1^4 (\ln(x)-h(x))dx$

Attention, on fait *toujours* une différence (les intégrales sont des aires algébriques, donc avec des signes) !!
et l'ordre est important (la plus grande - la plus petite)!!

Donc $D=\int_1^4 \ln(x)dx-\int_1^4 h(x)dx$ par linéarité de l'intégrale

Donc $D=\int_1^4 \ln(x)dx$ d'après 1a)

Donc $D=f(4)-f(1)$ d'après 2)

Ainsi $D=4(\ln(4)-1)-(1(\ln(1)-1))=4\ln(4)-4-(0-1)=8\ln(2)-3\approx 2{,}545$ **Attention aux parenthèses !**

Exercice 4 : **Partie A**

1. On remplit le tableau en colonne, case par case et l'ordre est crucial ! Ainsi, pour le test, il est nécessaire de considérer la valeur de k pour l'ordinateur au moment où le test est effectué, donc celui de la colonne précédente ! (k n'augmentant qu'une fois le test Vrai confirmé, donc après). On sort de la boucle "tant que", au premier faux trouvé, et on y revient plus !

Test		$Vrai(0\leq 2)$	$Vrai(1\leq 2)$	$Vrai(2\leq 2)$	$Faux(3>2)$	
U	0	3	10	29		
k	0	1	2	3		

2. L'affichage en sortie est donc 29.

Partie B

1. $u_1=3$ et $u_2=10$ (voir tableau ci-dessus) **Attention aux indices ....**

2. a. <u>Initialisation :</u> pour $n=0$, on a $u_0=0\geq 0=n$ **Inutile de regarder pour n=1 ...**

<u>Hérédité :</u> Supposons qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $u_k\geq k$. A-t-on $u_{k+1}\geq k+1$? **k est un entier, pas un réel !!**

H.R. : $u_k\geq k$

$\Leftrightarrow 3u_k\geq 3k$ car $3>0$

$\Leftrightarrow 3u_k-2k+3>3k-2k+3$

$\Leftrightarrow u_{k+1}\geq k+3\geq k+1$ **Certains n'ont juste pas remarqué la fin, quel dommage !**

On a bien $u_{k+1}\geq k+1$ donc on vient de démontrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\geq n$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ donc d'après le théorème de **minoration** des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

3. $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}-u_n=3u_n-2n+3-u_n=2u_n-2n+3$

Or, $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\geq n$ $\Leftrightarrow 2u_n\geq 2n \Leftrightarrow 2u_n-2n\geq 0$ Donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}-u_n\geq 3>0$

Donc la suite (u_n) est (strictement) croissante sur $\mathbb{N}$.

4. a. $\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)+1$ **Tellement d'erreurs d'indice !**

Donc $\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+1}=3u_n-2n+3-n-1+1=3u_n-3n+3=3(u_n-n+1)=3v_n$ **Tellement d'erreurs de conclusion !**

Donc la suite (v_n) est géométrique, de raison 3 et de premier terme $v_0=u_0-0+1=0+1=1$

b. on a donc $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=u_n-n+1=3^n$ Or $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=u_n-n+1 \Leftrightarrow u_n=v_n+n-1$

donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=3^n+n-1$

5. a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ Donc $\forall A>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, n>n_0 \Rightarrow u_n>A$ **C'est la définition de la divergence vers + l'infini !**

En prenant $A=10^p$ on a donc bien $\forall p\in\mathbb{N}^*, 10^p>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, n>n_0\Rightarrow u_n>10^p$

b. On sait que $u_{3p}=3^{3p}+3p-1$ d'après 5b)

Donc $u_{3p}=(3^3)^p+3p-1=27^p+3p-1$ **Il faut connaître ses règles sur les exposants ...**

Or $p\geq 1$ donc $3p-1>0$ Ainsi $u_{3p}>27^p>10^p$

La suite (u_n) étant **croissante**, on peut donc affirmer que $\forall p\in\mathbb{N}^*, \forall n\geq 3p$ on a $u_n>10^p$

$3p$ est donc une valeur qui correspond à la question **5. a.**

Donc comme n_0 est la plus petite des valeurs répondant à la question **5. a.**, on a $n_0\leq 3p$

5. c. Si $p=3$, $10^p=1000$ nous allons donc chercher la première valeur de (u_n) qui va dépasser 1000 :

$u_6=3^6+6-1=734$ et $u_7=3^7+7-1=2193$ donc $n_0=7$

5. d.

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul p.
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Affecter à k la valeur 0
Tant que $(U<10^p)$ **faire** **Attention à la condition ! Il s'agit d'une inégalité stricte !**
  Affecter à U la valeur $3U-2k+3$
  Affecter à k la valeur $k+1$
Fin Tant que
Sortie
Afficher k