Nom : .... **Prénom :** .... **Classe :** ....

BAC BLANC N° 7 (4H)

Exercice 1 : Candidats n'ayant pas suivant l'enseignement de spécialité (5 points)

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1$^{\text{er}}$ niveau, 75 vont au 2$^{\text{e}}$ niveau et 100 vont au 3$^{\text{e}}$ niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2$^{\text{e}}$ niveau, les autres vont au 1$^{\text{er}}$ niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.
On pourra considérer les évènements suivants :

- N_1 : « La personne va au premier niveau. »
- N_2 : « La personne va au deuxième niveau. »
- N_3 : « La personne va au troisième niveau. »
- E : « La personne emprunte l'escalier. »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. **a.** Montrer que la probabilité que la personne aille au 2$^{\text{e}}$ niveau par l'escalier est égale à $\dfrac{1}{12}$.

b. Montrer que les évènements N_1, N_2 et N_3 sont équiprobables.

c. Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2$^{\text{e}}$ niveau.

3. On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2$^{\text{e}}$ niveau.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2$^{\text{e}}$ niveau.

c. En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2$^{\text{e}}$ niveau ?

4. Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins un personne va au 2$^{\text{e}}$ niveau » soit supérieure ou égale à $0,99$.

Justifier entièrement votre démarche.

Exercice 1 : Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

Partie A Restitution organisée de connaissance

Prérequis : « $a \equiv b \pmod{n}$ si et seulement si $a - b$ est divisible par n ».

Soit a, b, c, d des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.
Montrer que si $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$ alors $ac \equiv bd \pmod{n}$.

Partie B **Inverse de 23 modulo 26**

On considère l'équation

$$(\text{E}) : \quad 23x - 26y = 1,$$

où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-9\ ;\ -8)$ est solution de l'équation (E).
2. Démontrer que les solutions $(x; y)$ de l'équation (E) sont tous les couples d'entiers de la forme $(26k-9; 23k-8)$ où k appartient à $\mathbb{Z}$.
3. En déduire un entier a tel que $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $23a \equiv 1 \pmod{26}$.

Partie C **Chiffrement de Hill**

On veut coder un mot de deux lettres selon la procédure suivante :

Étape 1 Chaque lettre du mot est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient un couple d'entiers $(x_1\ ;\ x_2)$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

Étape 2 $(x_1\ ;\ x_2)$ est transformé en $\left(y_1\ ;\ y_2\right)$ tel que :

$$(\text{S}_1) \left\{ \begin{array}{lcll} y_1 & \equiv & 11x_1 + 3x_2 & \pmod{26} \\ y_2 & \equiv & 7x_1 + 4x_2 & \pmod{26} \end{array} \right. \quad \text{avec } 0 \leqslant y_1 \leqslant 25 \text{ et } 0 \leqslant y_2 \leqslant 25.$$

Étape 3 $\left(y_1\ ;\ y_2\right)$ est transformé en un mot de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple : $\underbrace{\text{TE}}_{\text{mot en clair}} \overset{\text{étape1}}{\Longrightarrow} (19,4) \overset{\text{étape 2}}{\Longrightarrow} (13,19) \overset{\text{étape 3}}{\Longrightarrow} \underbrace{\text{NT}}_{\text{mot codé}}$

1. Coder le mot ST.
2. On veut maintenant déterminer la procédure de décodage :
   a. Montrer que tout couple $(x_1\ ;\ x_2)$ vérifiant les équations du système (S_1), vérifie les équations du système :

$$(\text{S}_2) \left\{ \begin{array}{lcll} 23x_1 & \equiv & 4y_1 + 23y_2 & \pmod{26} \\ 23x_2 & \equiv & 19y_1 + 11y_2 & \pmod{26} \end{array} \right.$$

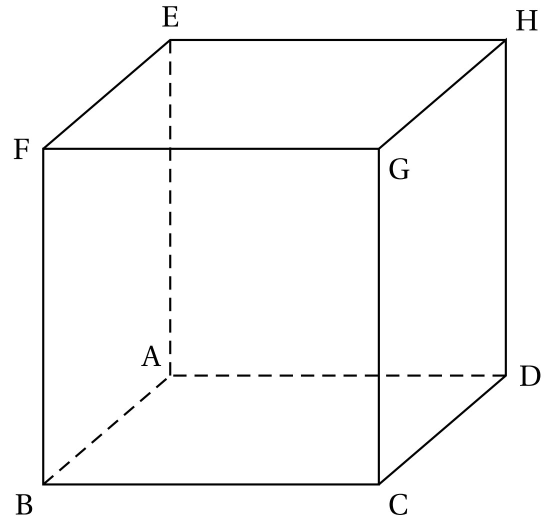
   b. À l'aide de la partie B, montrer que tout couple $(x_1\ ;\ x_2)$ vérifiant les équations du système (S_2), vérifie les équations du système :

$$(\text{S}_3) \left\{ \begin{array}{lcll} x_1 & \equiv & 16y_1 + y_2 & \pmod{26} \\ x_2 & \equiv & 11y_1 + 5y_2 & \pmod{26} \end{array} \right.$$

   c. Montrer que tout couple $(x_1\ ;\ x_2)$ vérifiant les équations du système (S_3), vérifie les équations du système (S_1)

   d. Décoder le mot **YJ**.

Exercice 2 : Commun à tous les candidats (4 points)



On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

On considère les points $I\left(1\,;\,\frac{1}{3}\,;\,0\right)$, $J\left(0\,;\,\frac{2}{3}\,;\,1\right)$, $K\left(\frac{3}{4}\,;\,0\,;\,1\right)$ et $L(a\,;\,1\,;\,0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

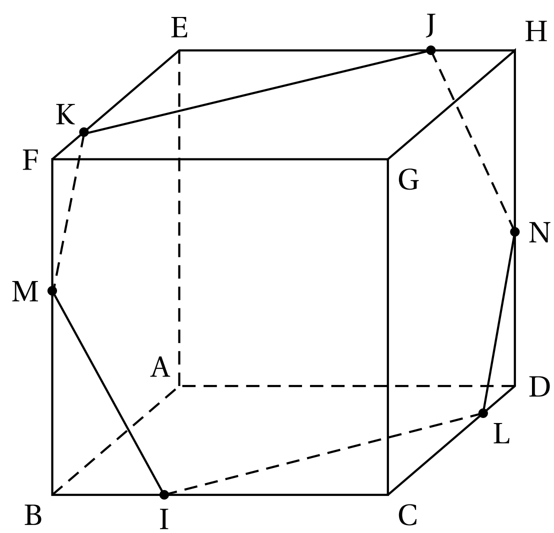
2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{array}\right.$, $t' \in \mathbb{R}$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \frac{1}{4}$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$. Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;\,1\,;\,0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.



2. La figure ci-contre fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).

Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.

a. Prouver que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(8\,;\,9\,;\,5)$ est un vecteur normal au plan (IJK).

b. En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x + 9y + 5z - 11 = 0$.

c. En déduire les coordonnées des points M et N

Exercice 3 : Commun à tous les candidats **(6 points)**

Partie A

1. Soit x un réel supérieur ou égal à 1.
   Calculer en fonction de x l'intégrale $\displaystyle\int_1^x (2-t)\,dt$.
2. Démontrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, on a : $2-t \leqslant \dfrac{1}{t}$.
3. Déduire de ce qui précède que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :

$$-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2} \leqslant \ln x.$$

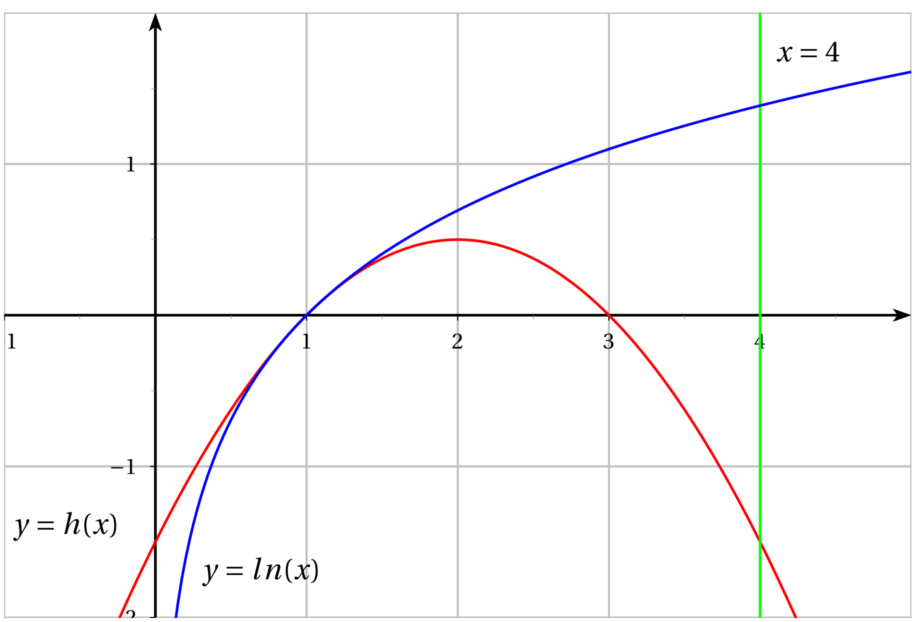
Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\dfrac{1}{2}x^2+2x-\dfrac{3}{2}$.

Sur le graphique ci-dessous, le plan est muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel on a tracé les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1\ ;\ 4]$. On a tracé également la droite (d) d'équation $x = 4$.

1. **a.** Démontrer que $\displaystyle\int_1^4 h(x)\,dx = 0$.

   b. Illustrer sur le graphique le résultat de la question précédente.
2. Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = x(\ln(x)-1)$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0;+\infty[$.
3. On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan délimité par la droite (d) et les courbes représentatives des fonction h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1\ ;\ 4]$.
   En utilisant ce qui précède, calculer l'aire de $\mathscr{D}$ en unités d'aire.



Exercice 4 : Commun à tous les candidats (5 points)

Partie A

On considère l'algorithme ci-contre.
Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

1. Compléter la trace d'exécution de cet algorithme dans le tableau ci-dessous, avec l'entrée $N = 3$.
   Indications :
   – Toutes les cases ne sont pas forcément à remplir, c'est à vous de savoir où vous arrêter.
   – Dans la ligne « Test », on attend une réponse du type « Vrai » ou « Faux »
2. Quel est alors l'affichage en sortie ?

Algorithme 1 :

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N.
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Affecter à k la valeur 0
Tant que $(k \leq N-1)$ **Faire**
  Affecter à U la valeur $3U - 2k + 3$
  Affecter à k la valeur $k + 1$
Fin Tant que
Sortie
Afficher U

Trace d'algorithme

Test						
U	0					
k	0					

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.
   b. En déduire la limite de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.
5. Soit p un entier naturel non nul.
   a. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?
   On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.
   b. Justifier que $n_0 \leqslant 3p$.
   c. Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.
   d. Modifier l'algorithme précédent pour que, pour une valeur de p donnée en entrée, il affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.