CORRECTION BAC BLANC (4H)

Exercice 1 : **Commun à tous les candidats** **(5 points)**

1. On a B(1;0;0) , C(1;1;0) , F(1;0;1) et H(0;1;1). Donc I$\left(1;\frac{1}{2};0\right)$, J$\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$ et K$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$.

2. On a $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{IK}=\ldots=0$ On a $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{IJ}=\ldots=0$

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à (IJK) et une équation du plan (IJK) est : $2x+y+z=d$ avec $d\in\mathbb{R}$.
Comme I ∈ (IJK), ses coordonnées vérifient l'équation du plan et on en déduit $d=2\times1+\frac{1}{2}+0=\frac{5}{2}$.
Finalement (IJK) a pour équation $2x+y+z=\frac{5}{2}\iff 4x+2y+2z-5=0$

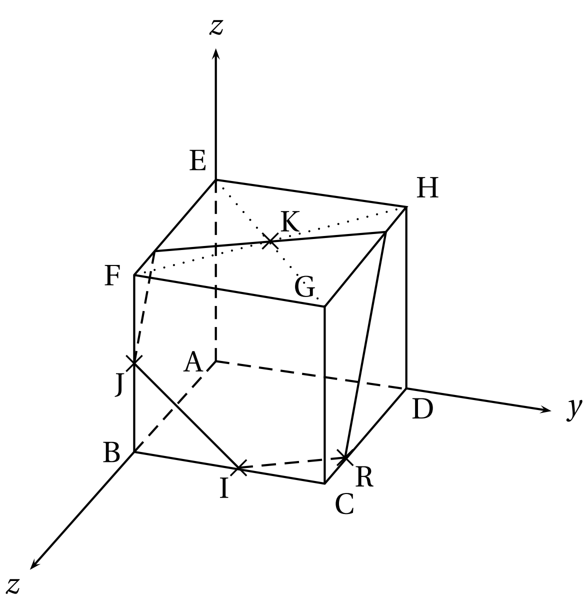
3. **a.** On a C(1;1;0) et D(0;1;0). Le vecteur $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ dirige (CD).

De plus C ∈ (CD) donc un système d'équations paramétriques de (CD) est : $\left\{\begin{array}{l}x=1-t\\y=1\\z=0\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$

b. $R(x;y;z)\in(IJK)\cap(CD)\iff\left\{\begin{array}{l}4x+2y+2z-5=0\\x=1-t\\y=1\\z=0\end{array}\right.$

Nécessairement on a alors $4(1-t)+2\times1-2\times0-5=0\iff\ldots\iff t=\frac{1}{4}$.
Et dans ce cas on a $x=\frac{3}{4}$, $y=1$ et $z=0$. Donc R$\left(\frac{3}{4}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$.

4.



On trace [IJ] et [IR] puis la parallèle à (IR) passant par K, puis on relie ce qui manque.

Exercice 2 : Commun à tous les candidats **(5 points)**

Partie A

1. $f(x) = x \iff x - \ln\left(x^2+1\right) = x \iff \ln\left(x^2+1\right) = 0 \iff x^2+1 = 1 \iff x = 0$

2. Pour tout $x \in [0;1]$ on a $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.
   $f'(x)$ est clairement strictement positif pour tout $x \in [0;1[$ et $f'(1) = 0$.
   Donc f est strictement croissante sur $[0;1]$

3. $0 < x < 1 \iff f(0) < f(x) < f(1)$ car f est strictement croissante sur $[0;1]$.
   De plus $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln(2) < 1$. Au final, on a bien $f(x) \in [0;1]$.

Partie B

1. Initialisation : $u_0 = 1$ donc $u_0 \in [0;1]$ est vraie.
   Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $u_k \in [0;1]$.
   Alors $u_{k+1} = f(u_k) \in [0;1]$ d'après la question 3 de la partie A. Donc la propriété est héréditaire.
   Conclusion : pour tout $n \geq 0$ on a $u_n \in [0;1]$

2. $u_{n+1} - u_n = u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) - u_n = -\ln\left(u_n^2+1\right)$.
   Or $u_n^2 \geq 0$ donc $u_n^2 + 1 \geq 1$ et $\ln\left(u_n^2+1\right) \geq 0$.
   D'où $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite est donc décroissante.

3. La suite est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel ℓ.
   On sait que pour tout $n \geq 0$ on a $u_{n+1} = f(u_n)$ et que la fonction f est continue. Ainsi : $\ell = f(\ell)$.
   D'après la question 1 de la partie A, on a donc $\ell = 0$.

Exercice 3 : Commun à tous les candidats **(5 points)**

Partie A :

1. $\mathrm{P}(z) = z^3 - 2\left(1+\sqrt{2}-i\right)z^2 + 4\left(2+\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)z - 16(1-i)$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(z) = (z-2+2i)(z^2+az+b) &\iff \mathrm{P}(z) = z^3 + az^2 + bz - 2z^2 - 2az - 2b + 2iz^2 + 2iaz + 2ib \\ &\iff z^3 + z^2(a-2+2i) + z(b-2a+2ia) - 2b + 2ib\end{aligned}$$

   Nécessairement on a donc $-16(1-i) = -2b + 2ib \iff \ldots \iff b = 8$
   Et $-2\left(1+\sqrt{2}-i\right) = a - 2 + 2i \iff \ldots \iff a = -2\sqrt{2}$.
   Finalement on a $\mathrm{P}(z) = (z-2+2i)(z^2 - 2\sqrt{2}z + 8)$

2. $\mathrm{P}(z) = 0 \iff z_0 = 2 - 2i$ ou $z^2 - 2\sqrt{2}z + 8 = 0$
   On a $\Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 8 = 8 - 32 = -24$. Donc $z_1 = \dfrac{2\sqrt{2} + i\sqrt{24}}{2} = \dfrac{2\sqrt{2} + 2i\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$
   Et $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$. Finalement $\mathscr{S} = \{z_0; z_1; z_2\}$

Partie B :

1. **a.** $\mathrm{Z} = \dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2-2i} \times \dfrac{2+2i}{2+2i} = \dfrac{2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}+2i\sqrt{6}-2\sqrt{6}}{4+4} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$

   b. $|z_0| = \sqrt{2^2+2^2} = \ldots = 2\sqrt{2}$ et $z_0 = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{2}{2\sqrt{2}} - i\dfrac{2}{2\sqrt{2}}\right) = \ldots = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
   Ainsi $\arg(z_0) = -\dfrac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ et $z_0 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

$|z_1| = \ldots = 2\sqrt{2}$ et $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + i\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}\right) = \ldots = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ainsi $\arg(z_1) = \dfrac{\pi}{3}\quad[2\pi]$ et $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

c. On en déduit $Z = \dfrac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{3}+i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{7\pi}{12}}$

d. D'après la question 1a), on a $\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

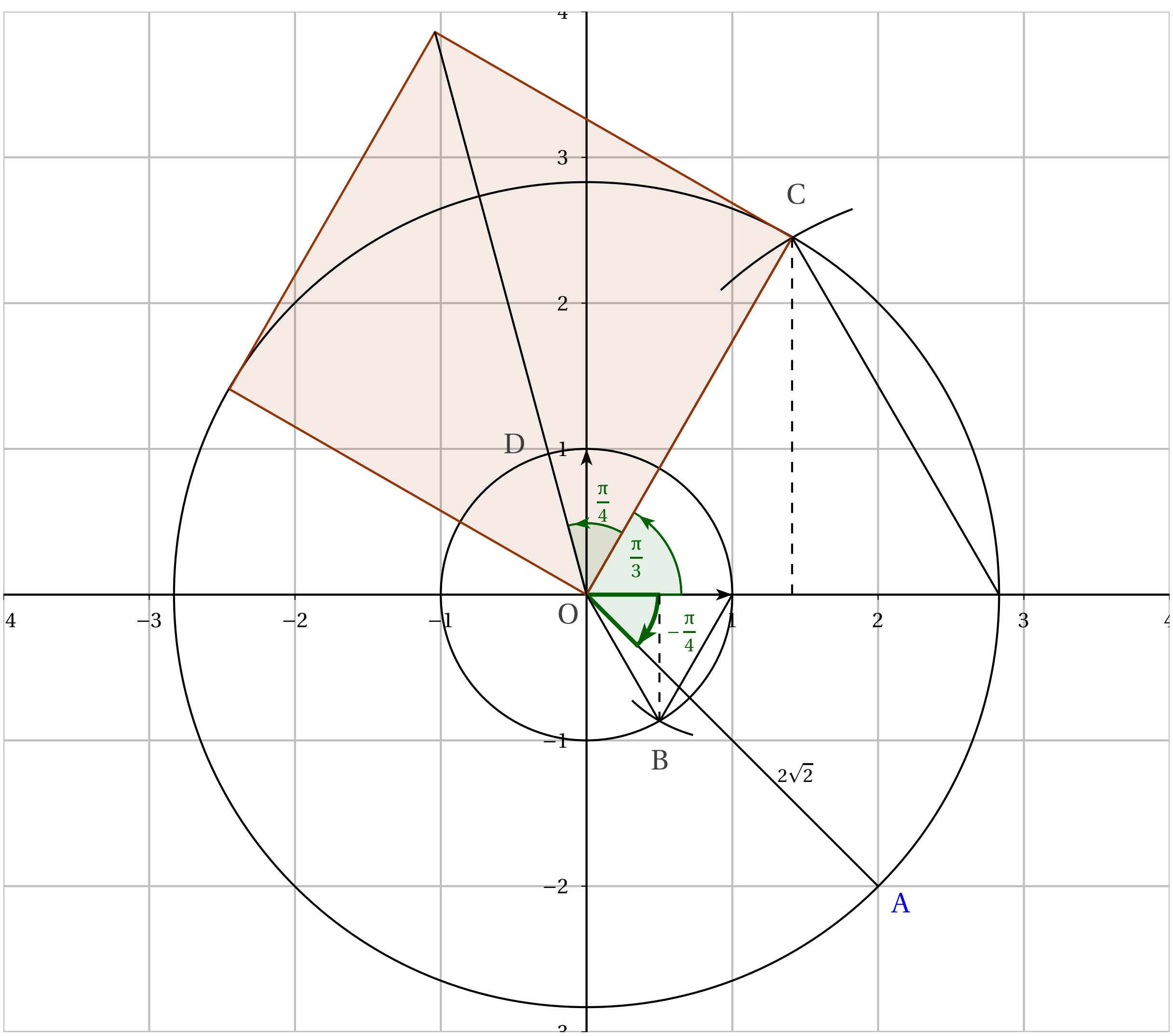
2. **a.** $Z^{2012} = e^{i\dfrac{7\pi}{12}\times 2012} = e^{i\dfrac{3521\pi}{3}}$

b. On cherche en fait la mesure principale de l'angle $\dfrac{3521\pi}{3}$.

On a $1173 < \dfrac{3521}{3} < 1174 \iff \ldots \iff -\pi < -\dfrac{\pi}{3} < 0$ Donc l'argument principal de Z^{2012} est $-\dfrac{\pi}{3}$.

c. On en déduit que $Z^{2012} = e^{-i\dfrac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3.



Exercice 4 : Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

Partie A :

1. a. On peut avoir les listes L_2 et L_4 car ce sont les seules ne comportant que des nombres entiers différents compris entre 1 et 50.

b. Cet algorithme permet de réaliser des groupes de 5 cyclistes différents de manières aléatoire.

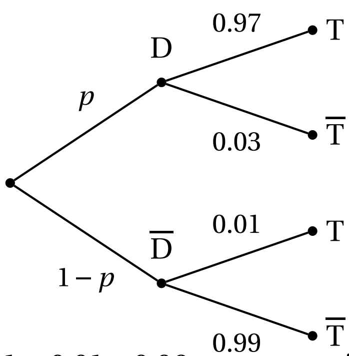
2. La probabilité que Loïc subisse un contrôle est de $\dfrac{5}{50} = \dfrac{1}{10} = 0.1$.

3. a. On répète 10 fois de manière identique et indépendante, l'épreuve de Bernoulli « Etre ou ne pas être contrôlé à la fin d'une étape ».
Le succès étant « Etre contrôlé », de probabilité 0.1, et X compte le nombre de succès.
Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.1$

b.
- Loïc a été contrôlé 5 fois exactement : $P(X = 5) = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \times 0.1^5 \times 0.9^5 \simeq$
- Loïc n'a pas été contrôlé : $P(X = 0) = 0.9^{10} \simeq$
- Loïc a été contrôlé au moins une fois : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \simeq$

Partie B :

1.



Ainsi $P(T) = p \times 0.97 + (1-p) \times 0.01 = 0.01 + 0.96p$ et on sait que $P(T) = 0.05$.

Par conséquent, $0.01 + 0.96p = 0.05 \iff 0.96p = 0.04 \iff p = \dfrac{4}{96} = \dfrac{1}{24}$

2. On cherche $P_T(\overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D} \cap T)}{P(T)} = \dfrac{\dfrac{23}{24} \times 0.01}{0.05} = \dfrac{23}{120}$