Nom : .... **Prénom :** .... **Classe :** ....

Bac Blanc (4h)

Exercice 1 : **Commun à tous les candidats** **(5 points)**

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\right)$.
On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous, à rendre avec la copie.
On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [BF] et [HF].

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

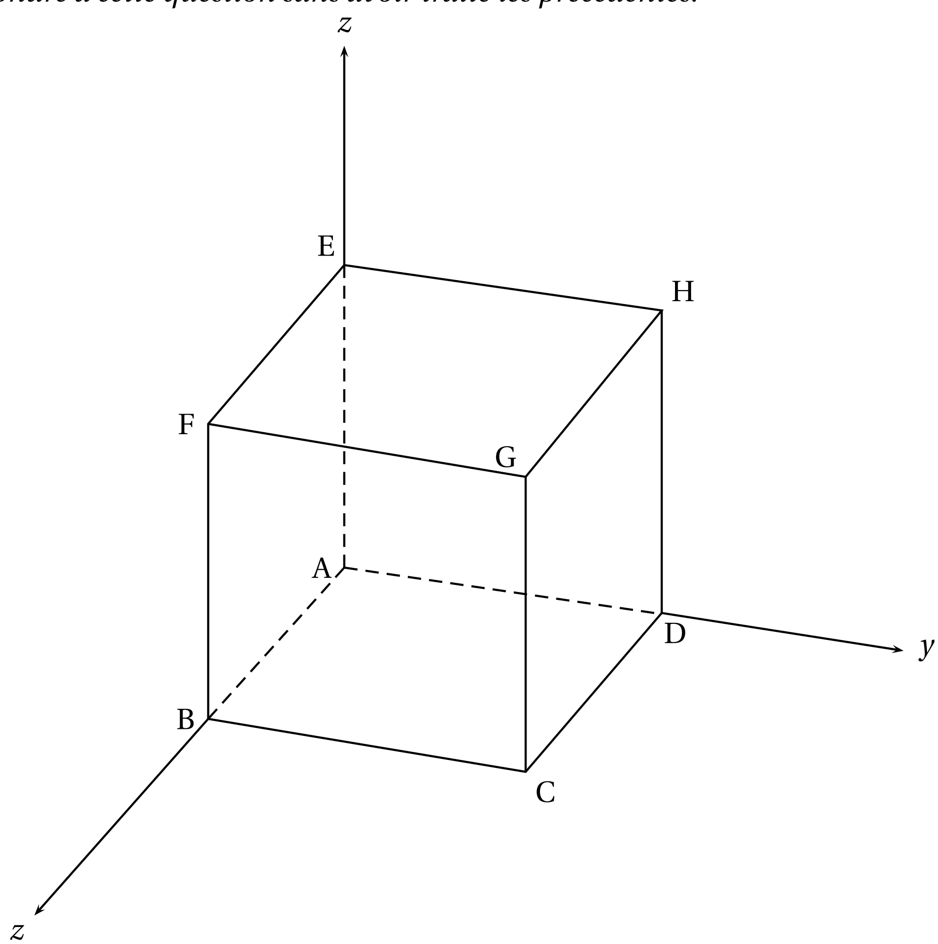
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(2\,;\,1\,;\,1)$ est orthogonal à $\overrightarrow{IK}$ et à $\overrightarrow{IJ}$.
En déduire qu'une équation du plan (IJK) est : $4x+2y+2z-5=0$.

3. **a.** Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

b. En déduire que le point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD) est le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{4}\,;\,1\,;\,0\right)$.

c. Placer le point R sur la figure.

4. Tracer sur la figure la section du cube par le plan (IJK).
On peut répondre à cette question sans avoir traité les précédentes.



Exercice 2 : **Commun à tous les candidats** **(5 points)**

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

Partie A : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
3. En déduire que si $x \in [0\ ;\ 1]$ alors $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.

Partie B :

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0\ ;\ 1]$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

Exercice 3 : **Commun à tous les candidats** **(5 points)**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$\mathrm{P}(z) = z^3 - 2\left(1+\sqrt{2}-i\right)z^2 + 4\left(2+\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)z - 16(1-i)$$

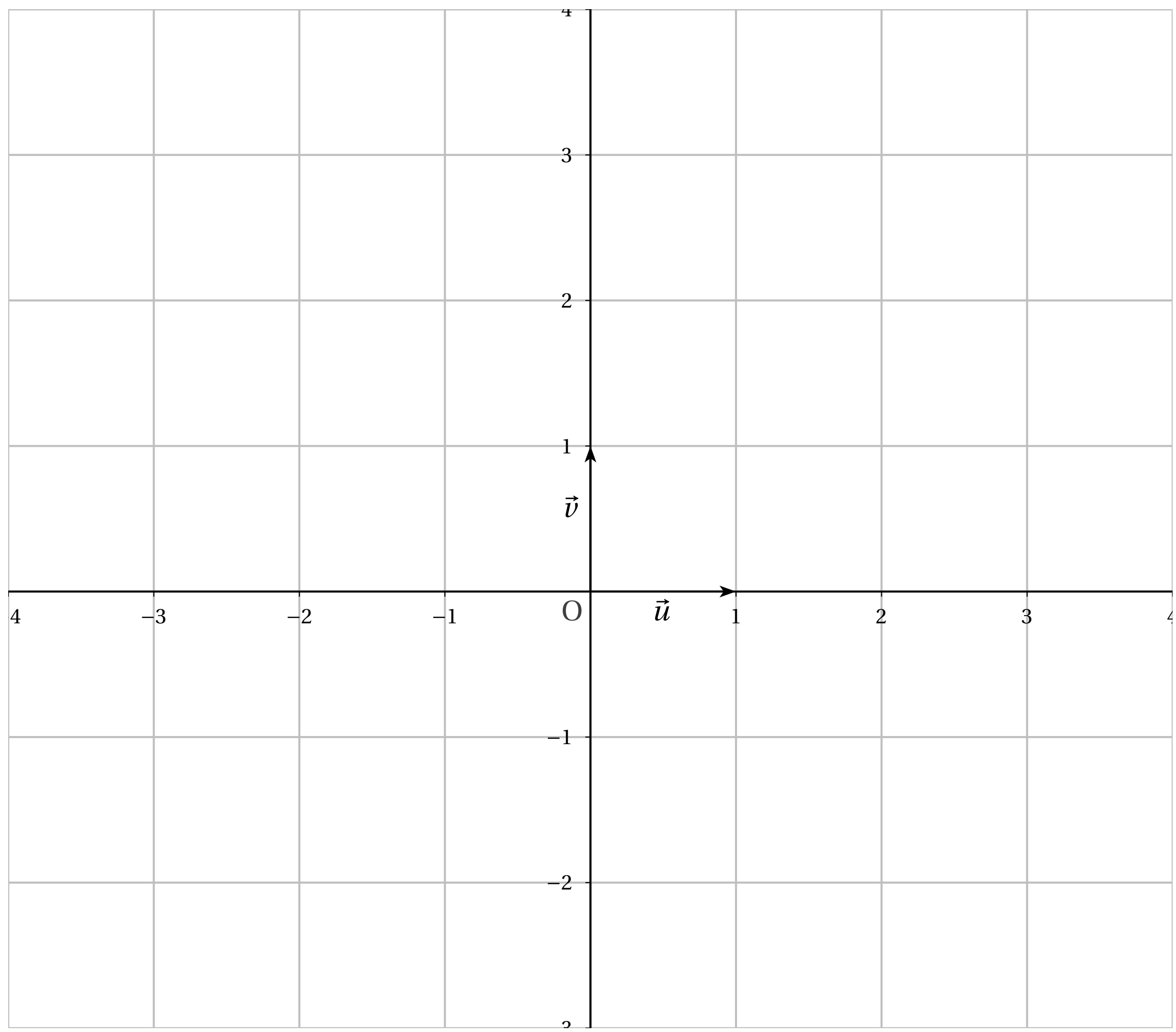
1. Déterminer les réels a et b tels que $\mathrm{P}(z) = (z-2+2i)(z^2+az+b)$
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$.

Partie B : Soient les nombres complexes :

$$z_0 = 2-2i \qquad\qquad z_1 = \sqrt{2}+i\sqrt{6} \qquad\qquad \mathrm{Z} = \frac{z_1}{z_0}$$

1. **a.** Ecrire Z sous forme algébrique.
   b. Ecrire chacun des nombres complexes z_0 et z_1 sous forme exponentielle.
   c. En déduire la forme exponentielle de Z.
   d. Déduire des questions 1a) et 1c) les valeurs de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$
2. **a.** Déterminer la forme exponentielle de Z^{2012}.
   b. En déduire l'argument **principal** de Z^{2012}. *Bien détailler la réponse.*
   c. Déterminer alors la forme algébrique de Z^{2012}.
3. Le plan complexe est muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$ ci-dessous.
   On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives z_0 , Z^{2012} , z_1 et Z.
   a. Placer le point A dans ce repère (sur l'énoncé), puis coder OA ainsi que $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$.

b. Dans le repère ci-dessous, placer les points B, C et D à la règle (non graduée) et au compas.
Attention, la règle sert uniquement à tracer des traits droits.
Pour le reste, pensez à utiliser le compas pour reporter des longueurs, tracer des triangles équilatéraux, des carrés, des cercles ...
Les traits de construction doivent être suffisamment explicites pour justifier la figure, sans avoir besoin de rédiger ...



<u>Exercice 4</u> : Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.

À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle anti-dopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

Les résultats des contrôles étant obtenus après la fin de la course, un coureur contrôlé positif aura tout de même participé à chaque étape de la course.

1. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
- « rand(1, 50) » permet d'obtenir **un nombre entier aléatoire** appartenant à l'intervalle [1 ; 50]
- l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables	a, b, c, d, e sont des variables du type entier
Initialisation	$a := 0$; $b := 0$; $c := 0$; $d := 0$; $e := 0$
Traitement	Tant que $\big((a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)\big)$ Début du tant que $a :=$ rand(1, 50) ; $b :=$ rand(1, 50) ; $c :=$ rand(1, 50) $d :=$ rand(1, 50) ; $e :=$ rand(1, 50) Fin du tant que
Sortie	Afficher a, b, c, d, e

a. Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ?

$L_1 = \{2 ; 11 ; 44 ; 2 ; 15\}$ $L_2 = \{8 ; 17 ; 41 ; 34 ; 6\}$

$L_3 = \{12 ; 17 ; 23 ; 57 ; 50\}$ $L_4 = \{45 ; 19 ; 43 ; 21 ; 18\}$

b. Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?

2. Loïc est l'un des 50 participants de la course. Justifier que la probabilité que Loïc subisse un contrôle à la fin d'une étape est égale à $0,1$.

3. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par Loïc sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

a. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? *Justifier et préciser ses paramètres.*

b. Calculer, arrondies au dix-millième près, les probabilités des évènements suivants :
- Loïc a été contrôlé 5 fois exactement ;
- Loïc n'a pas été contrôlé ;
- Loïc a été contrôlé au moins une fois.

Partie B : *Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
*On donnera les résultats sous forme de **fraction irréductible**.*

Pour un coureur choisi au hasard dans l'ensemble des 50 coureurs, on appelle T l'évènement : « le contrôle est positif », et d'après des statistiques, on admet que $P(T) = 0,05$.
On appelle D l'évènement : « le coureur est dopé ».
Le contrôle anti-dopage n'étant pas fiable à 100 %, on sait que :
- si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97 % des cas ;
- si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1 % des cas.

1. Calculer $P(D)$.

2. Un coureur a un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ?

Exercice 5 : Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

Les quatre questions sont indépendantes.

1. Justifier qu'il existe des nombres entiers x et y tels que $21x - 56y = 14$, puis donner un couple solution.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n, $\quad 2^{3n} \equiv 1 \pmod 7$.

b. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2011^{2012} par 7.

3. Soient a et b deux nombres réels, M une matrice carré d'ordre 2 :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$$

a. Calculer $\mathrm{M}^2 - (a+b)\mathrm{M}$ en fonction de I_2, matrice identité d'ordre 2.

b. En déduire les matrices M telles que $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}$.

4. On considère l'algorithme suivant où $\mathrm{Ent}\left(\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}\right)$ désigne la partie entière de $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}$.

A et N sont des entiers naturels
Saisir A
N prend la valeur 1
Tant que $\mathrm{N} \leqslant \sqrt{\mathrm{A}}$
  Si $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}} - \mathrm{Ent}\left(\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}\right) = 0$ alors Afficher N et $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}$
  Fin si
N prend la valeur N + 1
Fin Tant que.

a. Quels résultats affiche cet algorithme pour A = 12 ?

b. Que donne cet algorithme dans le cas général ?