DEVOIR SURVEILLÉ COMMUN : 2H

Exercice 1 : **(10 points)**

Partie A : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par **(4.5 points)**

$$g(x) = e^x - xe^x + 1$$

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etablir le tableau de variations complet de la fonction g.
3. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution.
   On note α cette solution.

   b. A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

   c. Montrer que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : Soit A la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que **(3 points)**

$$\mathrm{A}(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$$

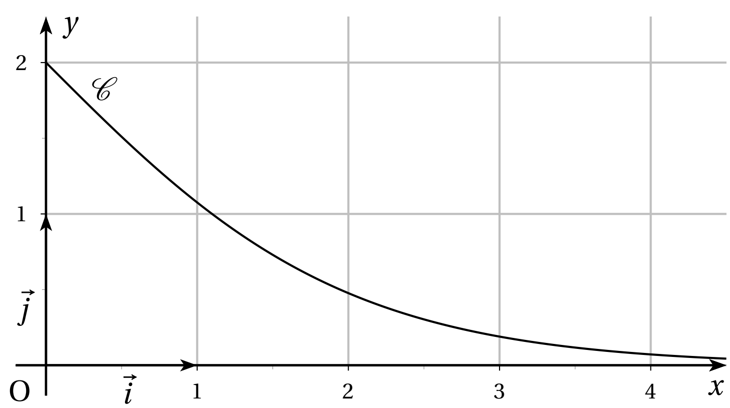
1. Déterminer les limites de A en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montrer que $\mathrm{A}'(x) = \dfrac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire les variations de la fonction A sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que le maximum de la fonction A sur $\mathbb{R}$ vaut $4(\alpha - 1)$.

Partie C : On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : **(2.5 points)**

$$f(x) = \frac{4}{e^x + 1}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
La figure est donnée ci-contre.
Pour tout réel x positif ou nul, on note :

- M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x ;
- P le point de l'axe des abscisses d'abscisse x
- Q le point de l'axe des ordonnées d'ordonnée $f(x)$.



1. Déterminer les coordonnées de chacun des points M, P et Q.
2. Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α et donner sa valeur exacte en fonction de α.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Le point M a pour abscisse α. La tangente T en M à $\mathscr{C}$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

Exercice 2 : **(10 points)**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : **(2 points)**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

Les solutions seront données sous forme algébrique.

$$(\mathrm{E}_1) : z + 2i = iz - 1 \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{E}_2) : 13z^2 + 6z + 1 = 0$$

Partie B : **(8 points)**

On définit la fonction polynôme f sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 24z + 40$$

1. **a.** Montrer que si z est un nombre imaginaire pur, noté $z = iy$ (avec $y \in \mathbb{R}$), alors

$$f(iy) = y^4 - 14y^2 + 40 + 6y(y^2 - 4)i$$

b. En déduire que l'équation $f(z) = 0$ possède exactement deux solutions imaginaires pures, que l'on précisera.

2. **a.** Trouver deux réels a et b tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait :

$$f(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4)$$

b. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$.

3. **a.** Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{u}; \vec{v})$, les images des points A, B, C et D des solutions de l'équation $f(z) = 0$. *On notera la cohérence ...*

b. **Bonus :** Démontrer que ces points sont le cercle de centre I d'affixe $z_{\mathrm{I}} = 1$, et de rayon $\mathrm{R} = \sqrt{5}$.