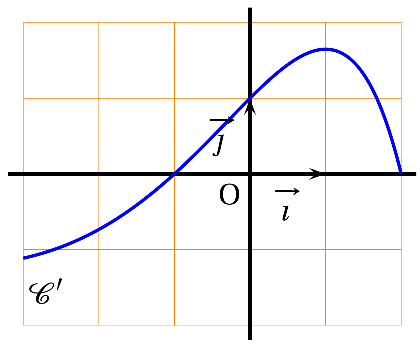
DEVOIR SURVEILLÉ COMMUN : 4H

Exercice 1 : **Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité** **(5 points)**

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A :
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{C}'$ ci -dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et **justifier** la réponse.

1. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$.
2. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, $f(x) \geqslant -1$.

Partie B :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cos(x)$.
Pour chacune des questions suivantes, entourer la bonne réponse sur le sujet, et **justifier** sur votre copie.

1. La dérivée f' de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) =$

   a. $\sin(x)$ **b.** $\cos(x)$ **c.** $\cos(x) + x\sin(x)$ **d.** $\cos(x) - x\sin(x)$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   a. $= 0$ **b.** $= +\infty$ **c.** n'existe pas **d.** Autre réponse

3. La fonction f est :

   a. paire **b.** impaire **c.** 2π- périodique **d.** Autre réponse

Exercice 1 : Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

A rendre sur feuille séparément

Dans cet exercice, toutes les questions de la partie A sont indépendantes.
Les deux parties A et B sont aussi indépendantes.

Partie A :
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier rigoureusement chacune de vos réponses.

1. On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 \equiv 0 \quad (3)$.
   Proposition : « Il existe au moins un couple (x, y) d'entiers relatifs solution de (E) qui n'est pas un couple de multiples de 3 ».
2. Soit n un entier, $n \geq 3$.
   Proposition : « Pour tout entier naturel k $(2 \leq k \leq n)$, le nombre $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n + k$ n'est pas premier ».
3. Soit $N = 11^{2011}$.
   Proposition : « L'entier N est congru à 4 modulo 7 ».

Partie B :

1. Donner la décomposition en produit de nombres premiers de 6!
   (On rappelle que pour tout entier $n \geq 2$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$).
2. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que $6! \times k$ soit le carré d'un nombre entier.
3. Question ouverte (*toute trace de recherche sera prise en compte dans l'évaluation*) :
   Pour tout entier naturel non nul A, comment déterminer le plus petit entier naturel k tel que $A \times k$ soit le carré d'un nombre entier ?

Exercice 2 : Commun à tous les candidats (5 points)

Partie A : Une fonction auxiliaire
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -14x^3 + 21x^2 + 8$$

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$
2. Etudier les variations de la fonction g.
3. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner un encadrement de α à 0.01 près.
4. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Etude d'une fonction

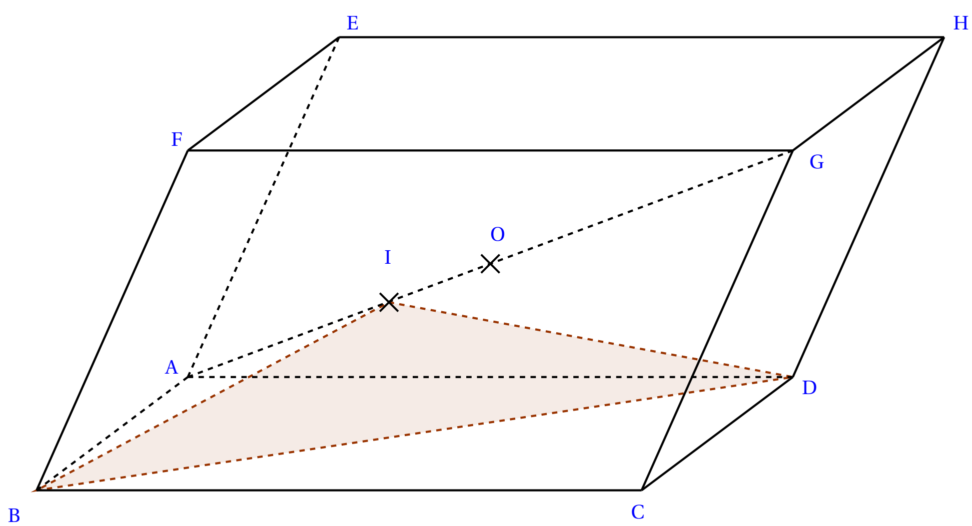
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^3 - 1)(7 - 2x)^4$$

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$
2. Montrer que $f'(x) = (7-2x)^3 \times g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et dresser le tableau de variations de f.
4. Combien l'équation $f(x) = 12$ possède-t-elle de solutions sur $\mathbb{R}$?
   On ne demande pas de les déterminer.

<u>Exercice 3</u> : Commun à tous les candidats **(5 points)**

ABCDEFGH est un parallélépipède et I le point tel que $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.



On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des points G et I dans le repère donné.
2. Montrer que $\overrightarrow{IE} = -\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{ID}$
3. Que peut-on en déduire sur les points I, B, D et E ?
4. En déduire la section du parallélépipède ABCDEFGH avec le plan (IBD).
   On complètera la figure sur le sujet.
5. Donner une représentation paramétrique de la droite (DE) et une de la droite d parallèle à (BE) passant par le centre O du parallélépipède ABCDEFGH.
6. Montrer que (DE) et d sont non coplanaires.

<u>Exercice 4</u> : Commun à tous les candidats (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes

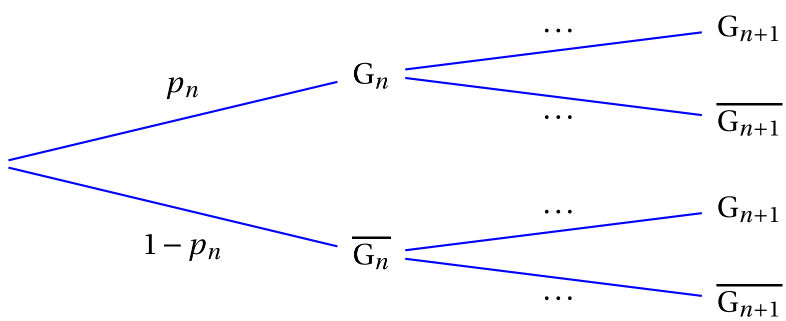
Un site internet propose des jeux en ligne.

Partie A : Pour un premier jeu :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\dfrac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\dfrac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Compléter sur le sujet l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{5}$.

3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \dfrac{1}{4}$.

a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.

b. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{4}$.

c. Déterminer la limite de p_n.

Partie B : Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.
On suppose que toutes les parties sont indépendantes.
La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\dfrac{1}{4}$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. **a.** Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

b. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.

c. Déterminer l'espérance de X.

2. Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €.

a. Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.

b. Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 €. Le résultat sera arrondi à 10^{-5} près.