DEVOIR SURVEILLÉ 1 : RÉCURRENCE ET LIMITES DE SUITES

Exercice 1 : Opérations sur les limites et FI (4 points)

Déterminer en rédigeant convenablement les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n^4 - 3n^3 + 0.9^n$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^3 + 27n^2 + 7}{0.1n^5 - 4}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} 6 - \dfrac{7}{0.9^n}$

Exercice 2 : Limites et comparaison (5 points)

1. On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{5n^2 - 3\cos(n)}{2n^2 + n + 1}$.
   - **a.** Calculer u_{100} puis u_{1000} à 10^{-4} près *(on réglera la calculatrice en radians)*. Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de (u_n) ?
   - **b.** Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.
2. - **a.** On considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n^2 + \sin(n)$. Déterminer la limite de la suite v.
   - **b.** A partir de quel rang est-on certain que $v_n \geq 10^6$?
3. On considère la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = n\left((-1)^n - 2\right)$. Déterminer la limite de la suite w.

Exercice 3 : Utilisation d'une suite auxiliaire (4 points)

On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{4}{5} \end{cases}$

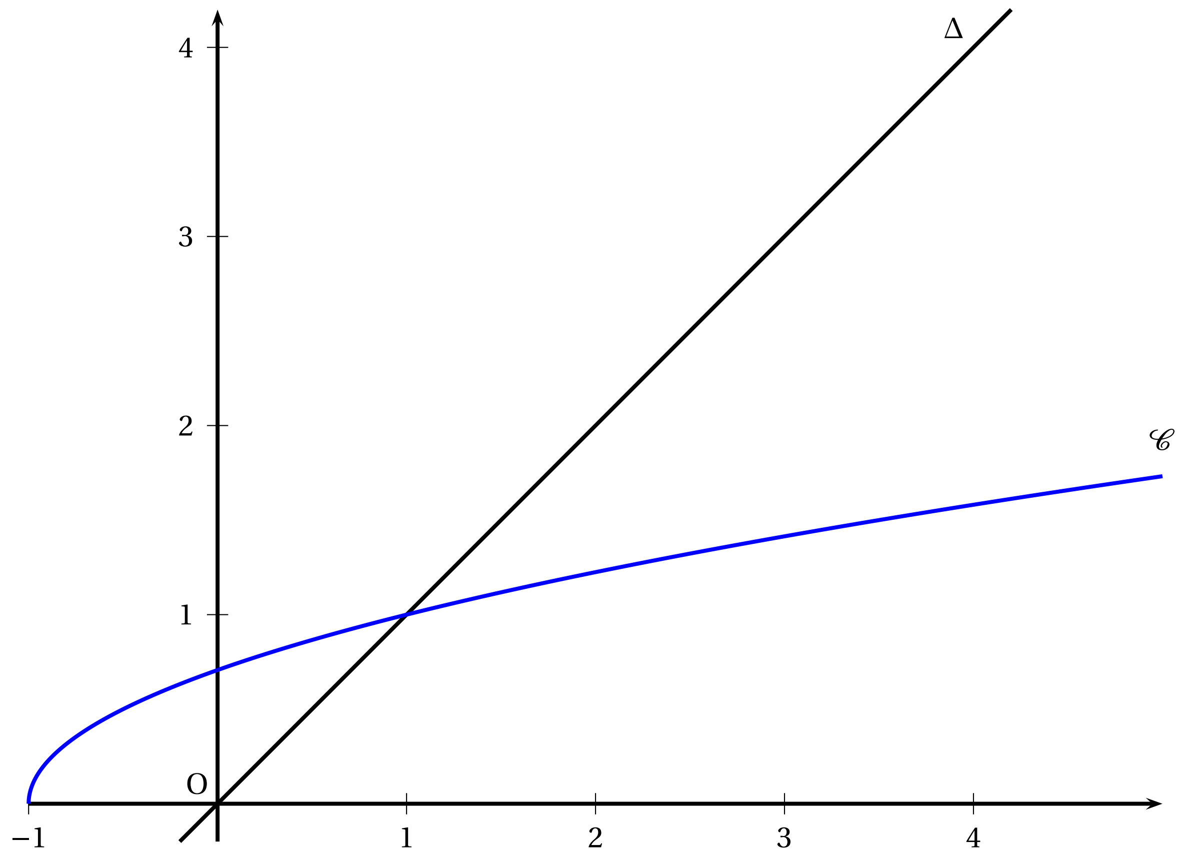
Et la suite (S_n) sur $\mathbb{N}$ par : $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k - n - 1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_n - n - 1$

1. - **a.** Montrer que la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$ est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.
   - **b.** En déduire l'expression de u_n en fonction de n et son éventuelle limite.
2. - **a.** Montrer que $\mathrm{S}_n = 14 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$.
   - **b.** Déterminer la limite ℓ de la suite S.

Exercice 4 : Suite récurrente (5 points)

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \end{cases}$

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$, alors on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On donne ci-dessous une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f, ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.



1. **a.** Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

   b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
4. Déterminer ℓ.

Exercice 5 : Récurrence (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$

Et la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_n = \dfrac{2^{n+1} - 2n - 3}{2^n}$