Devoir d'Entraînement 9 : Correction exercice 4 de la fiche

Partie A

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. • On a $\lim\limits_{x:\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

• $\frac{x}{x+1} = \frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$. Et $\lim\limits_{x:\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$

On a donc $\lim\limits_{x:\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim\limits_{x:\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) = \ln(1) = 0$ car la fonction ln est continue sur $]0;+\infty[$.

Par somme on obtient : $\lim\limits_{x:\to+\infty} f(x) = 0$.

2. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ On pose $u(x) = x+1$ Alors $u'(x) = 1$ et $\left(\frac{1}{x+1}\right)' = -\frac{1}{(x+1)^2}$

$(\ln(w))' = \frac{w'}{w}$. On pose $w(x) = \frac{x}{x+1}$ Alors $w' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $\begin{cases} u(x) = x & \text{et} \quad v(x) = x+1 \\ u'(x) = 1 & \text{et} \quad v'(x) = 1 \end{cases}$

On a donc $w'(x) = \frac{1\times(x+1) - x\times 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

D'où $\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)' = \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x(x+1)}$

Finalement $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{-x+x+1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2}$.

Comme $x \geqslant 1$, la $f'(x)$ est clairement strictement positive pour tout $x \in [1;+\infty[$.

$f(1) = \frac{1}{2} + \ln\frac{1}{2} \approx -0,193$.

x	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$
Variation de f	$-0.193 \nearrow 0$
Signe de $f(x)$	$-$

3. Le tableau montre que $f(x) < 0$ sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Partie B

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots - \ln n.$$

1. L'utilisateur rentre donc la valeur $n = 3$ et l'algorithme initialise $u = 0$.

On a alors la boucle pour $i = 1$ à 3 à détailler.

– Quand $i = 1$, on a $u = u + \frac{1}{i} = 0 + \frac{1}{1} = 1$

– Puis $i = 2$, donc $u = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

– Puis $i = 3$, donc $u = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

On sort de la boucle et l'algorithme affiche la valeur $\frac{11}{6}$.

2. On constate que pour une valeur n donnée par l'utilisateur, l'algorithme calcule et affiche

$$u = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Donc il suffit de modifier la sortie en : « Afficher $u - \ln n$ ».

3. On peut conjecturer que pour n allant de 4 à 2000 la suite est décroissante et converge vers une valeur proche de 0,577.

Partie C

1. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right] - \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right] \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = f(n) \end{aligned}$$

On a vu que pour $x \geqslant 1, f(x) < 0$, donc pour tout $n \geq 1$ on a $u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_{n+1} < u_n$. Autrement dit la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. a. $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$ (1) **Admis**

b. On obtient la suite des inégalités suivante :

$\ln(1+1) - \ln 1 \leqslant \frac{1}{1}$

$\ln(2+1) - \ln 2 \leqslant \frac{1}{2}$

$\ln(3+1) - \ln 3 \leqslant \frac{1}{3}$

....

$\ln(n) - \ln(n-1) \leqslant \frac{1}{n-1}$

$\ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}$

D'où par somme membres à membres et effet de « dominos » :

$\ln(n+1) - \ln 1 \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ ou encore

$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

c.

$$\begin{aligned} \ln(n+1) &\leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \\ \Longleftrightarrow \ln(n+1) - \ln(n) &\leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n) \\ \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) &\leqslant u_n \end{aligned}$$

Comme $\frac{n+1}{n} \geq 1$ on a $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \geq 0$. Donc pour tout $n > 0$ on a $u_n \geq 0$.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 : elle converge donc vers une limite supérieure à zéro.