


DEVOIR MAISON 7 : LA FONCTION EXPONENTIELLE


 **Exercice 1 : Un peu d'algo**
Pouvez-vous expliquer les résultats donnés ci-contre par le logiciel de calcul formel Xcasfr ?

<code>deriver(a*x^2+2a*x)</code>	<code>ax2xx+ 2xa</code>
<code>deriver(a*x^2+2a*x,x)</code>	<code>ax2xx+ 2xa</code>
<code>deriver(a*x^2+2a*x,a)</code>	<code>x^2+ 2xx</code>
<code>deriver(ax^2+2ax,x)</code>	<code>0</code>

 **Exercice 2 : Un peu de trigo**

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-\cos(x)}$, de courbe représentative \mathcal{C}_f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Démontrer que cette fonction est paire. Que peut-on en déduire sur sa \mathcal{C}_f ?
2. Démontrer que cette fonction est périodique, de période 2π .
3. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0; \pi]$.
4. Déduire des trois questions précédentes le tableau de variations de f sur $[-2\pi; 2\pi]$.
5. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

 **Exercice 3 : Un peu de démo**

 **Prérequis sur la fonction exponentielle :**

- La fonction exponentielle est l'unique fonction égale à sa dérivée telle que l'image de 0 soit 1.
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la dérivée de la fonction e^u sur I est $u' e^u$

On se propose de démontrer la propriété suivante :

$$\text{Pour tous réels } x \text{ et } y \text{ on a : } e^{x+y} = e^x \times e^y$$

ainsi que celles qui en découlent, à savoir :

$$\text{Pour tous réels } x \text{ et } y \text{ on a : } e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \text{et} \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$

Attention donc à ne pas utiliser ces propriétés dans la suite pour les démontrer !!

Soit y un réel quelconque, **fixé**. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^{x+y}}{e^x}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire que f est une fonction constante et que pour tout réel x , $f(x) = e^y$.
3. Conclure.
4. En remarquant que $-x + x = 0$ et $x - y = x + (-y)$, démontrer que, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \text{et} \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

 **Exercice 4 : Un peu de suite géo**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = e^{1-n}$.

1. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. La suite (u_n) est-elle convergente? Si oui, préciser sa limite.

3. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Montrer que $S_n = \frac{e^2}{e-1} (1 - e^{-n-1})$.

4. Calculer la limite de la suite (S_n) .

 **Exercice 5 : Encore un peu de suite et d'expo** On se place dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{-x}$, un réel a et la suite (v_n) définie pour tout entier

naturel n par :
$$\begin{cases} v_0 = a \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$$

1. Etudier la fonction f (tableau de variations complet).
2. On se place dans le cas $a = 1.5$.
 - a. Représenter sur un même graphique (unité 10 cm) la fonction f sur $[0; 1.6]$ et la droite d'équation $y = x$, puis les trois premiers termes de la suite (v_n) pour $a = 1.5$.
 - b. Conjecturer le sens de variation de la suite (v_n) et sa limite éventuelle.
 - c. Montrer par récurrence que la suite (v_n) est strictement positive.
 - d. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
 - e. La suite (v_n) est-elle convergente? Si oui, calculer sa limite.
3. *Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
 Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (v_n) suivant les valeurs du réel a ?