DEVOIR MAISON 2 : LIMITES DE SUITES

Exercice 1 : **VRAI OU FAUX**

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n$.

1. La suite (u_n) est bornée.
2. La suite (u_n) converge.
3. La suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ converge.
4. Une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas majorée.

Exercice 2 : Trouver une suite :

1. non majorée, mais qui ne tende pas vers $+\infty$.
2. croissante mais dont la limite n'est pas $+\infty$.
3. qui diverge vers $+\infty$ mais qui n'est pas croissante.
4. à termes strictement positifs et décroissante mais qui ne converge pas vers 0.

Des illustrations graphiques de suites peuvent vous aider.
D'ailleurs, à défaut de trouver trouver les suites demandées, vous pouvez joindre vos illustrations.

Exercice 3 : L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.

Si u est une suite croissante et convergente vers un réel ℓ alors la suite u est majorée par ℓ.

Pour cela, on raisonne par l'absurde : on considère bien une suite u croissante et convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$, mais on suppose qu'il existe un rang N_1 tel que $u_{\mathrm{N}_1} > \ell$.

1. Quelle hypothèse du théorème permet d'affirmer que $\forall n \geq \mathrm{N}_1$ on a $u_n \geq u_{\mathrm{N}_1} > l$?
2. On désigne par I l'intervalle ouvert $]\ell - 1; u_{\mathrm{N}_1}[$
   a. Pourquoi I contient ℓ ?
   b. Quelle hypothèse du théorème permet d'affirmer qu'il existe un rang N_2 à partir duquel tous les termes u_n sont dans I ?
3. On pose $\mathrm{N} = max(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$. Expliquer alors pourquoi pour tout $n \geq \mathrm{N}$ on obtient une absurdité.
4. Conclure.

Exercice 4 :

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et pour tout nombre entier naturel n,

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

   a. Calculer u_2, u_3 et u_4.
   b. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$.

c. Sur la figure ci-contre, sont tracées, dans un repère orthonormal les droites d'équation respectives $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 3$.
A partir de u_0, en utilisant ces deux droites, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière placer les termes u_2, u_3 et u_4.
Que peut-on conjecturer sur les variations et la convergence de cette suite ?

2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $v_n = u_n - 6$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.