DEVOIR MAISON 2 : LIMITES DE SUITES

Exercice 1 : (Annale 2009 à 2 points)

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n$.

1. La suite (u_n) est bornée par -1 et 1.
2. La suite (u_n) n'a pas de limite, donc elle ne converge pas.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\dfrac{-1}{n} \leq \dfrac{u_n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$. Or on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$.
   D'après le théorème des gendarmes, on peut conclure que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ converge vers 0.
4. Supposons qu'une suite tende vers $+\infty$ et soit majorée par M.
   Comme la suite tend vers $+\infty$, on sait qu'il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont plus grands que M. Mais ceci est absurde car M est un majorant de la suite, donc tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à M. Donc si une suite tend vers $+\infty$, elle n'est pas majorée.

Exercice 2 :

1. La suite de terme général $u_n = (-4)^n$ n'est pas majorée et n'a pas de limite.
2. On a souvent vu en classe des suites comme demandées.
   Par exemple, la suite de terme général $u_{n+1} = 6 - \dfrac{5}{u_n + 1}$ avec $u_0 = 0$ est croissante et convergente vers un réel α (cf annale 1).
3. La suite de terme général $u_n = n + (-1)^n$ tend vers $+\infty$ mais n'est pas croissante.
4. La suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ est à termes strictement positifs et décroissante mais elle ne converge pas vers 0.

Exercice 3 : On considère une suite u croissante et convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$, et on suppose qu'il existe un rang N_1 tel que $u_{N_1} > \ell$.

1. On sait que la suite u est croissante, donc $\forall n \geq N_1$ on a $u_n \geq u_{N_1} > l$
2. On désigne par I l'intervalle ouvert $]\ell - 1; u_{N_1}[$
   - **a.** On a les inégalités suivantes : $\ell - 1 < \ell$ de manière évidente et $\ell < u_{N_1}$ par hypothèse.
     (Les inégalités sont strictes et c'est important pour conclure car I *est ouvert)* Donc I contient ℓ.
   - **b.** On sait que la suite u converge vers ℓ, donc par définition de la convergence, il existe un rang N_2 à partir duquel tous les termes u_n sont dans I.
3. On pose $N = max(N_1, N_2)$. Alors pour tout $n \leq N$, on a en particulier :
   - $n \geq N_1$ donc $u_n \geq u_{N_1}$ d'après le 1) autrement dit $u_n \notin I$
   - $n \geq N_2$ donc $u_n \in I$ d'après le 2b)

   Donc pour tout $n \leq N$, on a à la fois $u_n \notin I$ et $u_n \in I$, ce qui est absurde.
4. On conclut donc que si une suite est croissante et converge vers ℓ, alors la suite est majorée par ℓ.

Exercice 4 : (Annale 2009 à 4 points)

1. **a.** $u_2 = \dfrac{3}{2}u_1 - \dfrac{1}{2}u_0 = \dfrac{3}{2} \times 3 - \dfrac{1}{2} \times 0 = \dfrac{9}{2}$ $\qquad$ $u_3 = \dfrac{3}{2}u_2 - \dfrac{1}{2}u_1 = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2} \times 3 = \dfrac{27}{4} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{21}{4}$

   $u_4 = \dfrac{3}{2}u_3 - \dfrac{1}{2}u_2 = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{21}{4} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{9}{2} = \dfrac{63}{8} - \dfrac{9}{4} = \dfrac{45}{8}$

Lycée Jules Fil c.auperin@wicky-math.fr.nf

b. Utilisons le raisonnement par récurrence pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

Initialisation : pour $n = 0$.

On a $u_1 = 3$ d'après l'énoncé et $\frac{1}{2}u_0 + 3 = \frac{1}{2} \times 0 + 3 = 3$.

Donc on a bien $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 3$ et la proposition est initialisée à 0.

Hérédité : On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k + 3 \iff u_k = 2(u_{k+1} - 3)$

On veut montrer que cela implique $u_{k+2} = \frac{1}{2}u_{k+1} + 3$

$$\begin{aligned}
\text{D'après l'énoncé, on sait que} \quad u_{k+2} &= \frac{3}{2}u_{k+1} - \frac{1}{2}u_k \\
&= \frac{3}{2}u_{k+1} - \frac{1}{2} \times 2(u_{k+1} - 3) \qquad \text{(HR)} \\
&= \frac{3}{2}u_{k+1} - u_{k+1} + 3 \\
&= \frac{1}{2}u_{k+1} + 3
\end{aligned}$$

Donc la proposition est héréditaire à partir de 0.

Conclusion : La proposition est initialisée et héréditaire à partir de 0, elle est donc vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

c. Cf figure ci-contre. On peut conjecturer que la suite est croissante et convergente vers l'abscisse du point d'intersection des deux droites.

2. **a.** On constate déjà que $v_n = u_n - 6 \iff u_n = v_n + 6$

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{on a donc} \quad v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 \\
&= \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 \quad \text{d'après 1b)} \\
&= \frac{1}{2}u_n - 3 \\
&= \frac{1}{2}(v_n + 6) - 3 \qquad \text{d'après la constatation} \\
&= \frac{1}{2}v_n + 3 - 3 = \frac{1}{2}v_n
\end{aligned}$$

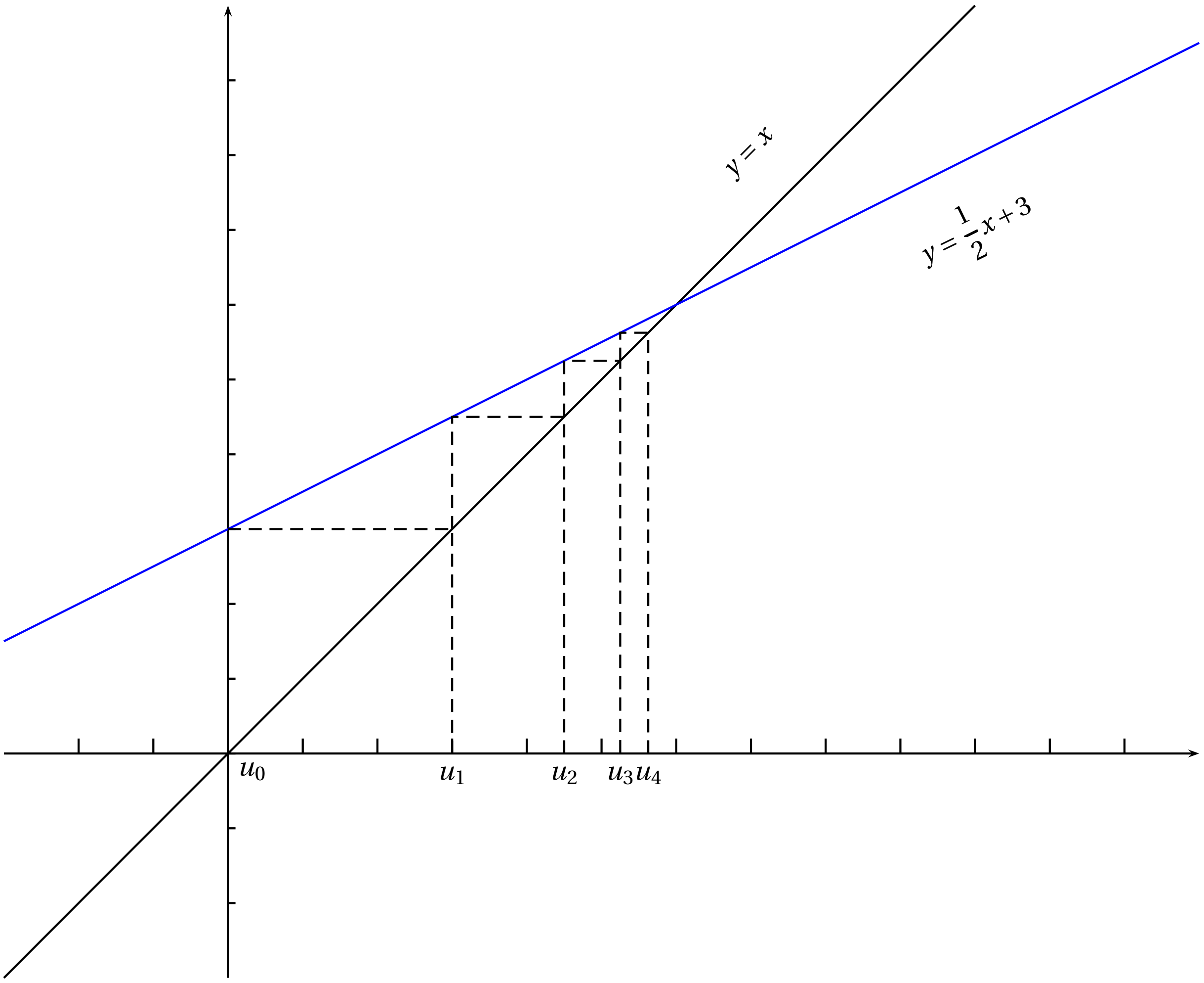
Donc la suite v est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = 0 - 6 = -6$.

b. Comme v est géométrique, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_n = v_0 \times q^n = -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Par conséquent, on en déduit $u_n = v_n + 6 = -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6 = -6 \times 0 + 6 = 6$.


$y = x$
$y = \frac{1}{2}x + 3$
u_0
u_1
u_2
u_3
u_4