Devoir Maison 1 : Le Raisonnement par Récurrence

Exercice 1 : **Vrai ou faux ? *Justifier***

1. Si une proposition est héréditaire, alors elle est vraie pour tout entier naturel n.
2. Si une proposition est vraie pour $n = 0$ et est héditaire, alors elle est vraie pour $n = 1$.
3. Si une proposition est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, alors elle eset vraie pour $n = 0$.
4. Si une proposition est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ alors elle est héréditaire.
5. Si une proposition est vraie pour $n = 5$ et est héréditaire à partir de $n = 3$ alors elle est vraie $\forall n \geq 3$.
6. Si une proposition est vraie pour $n = 5$ et est héréditaire à partir de $n = 3$ alors elle est vraie $\forall n \geq 5$.
7. Si une proposition est vraie pour $n = 3$ et est héréditaire à partir de $n = 5$ alors elle est vraie $\forall n \geq 3$.
8. Si une proposition est vraie pour $n = 3$ et est héréditaire à partir de $n = 5$ alors elle est vraie $\forall n \geq 5$.

Exercice 2 : (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 15$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 10u_n$.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = 5u_n$
2. En déduire la nature de la suite (u_n), puis l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3 :

1. Démontrer par récurrence que pour tout $q \neq 1$ et pour tout n on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
2. En déduire alors la formule connue sur la somme des n premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$