CHAPITRE 8

VOUS SAVIEZ DÉJÀ QUE LES MATHÉMATIQUES ÉTAIENT COMPLEXES !

HORS SUJET

TITRE : « Autoportrait avec cigarette (1895) » et « La madone (1895-1902) »

AUTEUR : EDVARD MUNCH

PRÉSENTATION SUCCINTE DE L'AUTEUR : Edvard Munch (1863 - 1944) est un peintre expressionniste norvégien, souvent considéré comme le pionnier de l'expressionnisme et très tôt réputé pour son appartenance à une nouvelle époque artistique en Europe. L'importance de son œuvre est aujourd'hui reconnue dans le monde.

Les œuvres de Munch les plus connues sont celles des années 1890, notamment *Le Cri* (1893) (cf fin du cours), pièce de la série *La Frise de la Vie*, que Munch a assemblée au tournant du siècle. Sa production ultérieure attire toutefois de plus en plus l'attention et semble inspirer tout spécialement les artistes actuels.

Munch traite d'une manière récurrente des thèmes de la vie, de l'amour, de la peur et de la mort. La collection la plus importante de ses œuvres se trouve au le Musée Munch dans Oslo. Quelques-unes de ses peintures se trouvent à la galerie nationale d'Oslo. L'Hotel Continental d'Oslo possède de nombreuses impressions. Enfin, la pinacothèque de Paris a organisé en 2010 la superbe exposition *Anti-Cri* regroupant de nombreux tableaux de Munch, issus de collections privées.

Le Cri et *La Madone* ont été volés le 22 août 2004 au musée Munch d'Oslo. Ils ont été récupérés dans des circonstances non connues en août 2006 en Norvège... Les deux œuvres ensemble sont estimées à 100 millions de dollars.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

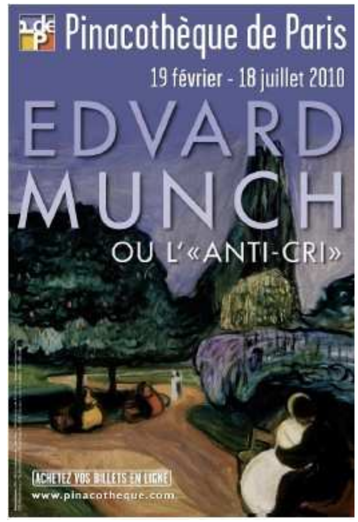
L'ESSENTIEL :

- ⇝ Découvrir de nouveaux nombres et les manipuler
- ⇝ Trouver leurs différentes formes
- ⇝ Utiliser les nombres complexes pour résoudre des équations ou des problèmes géométriques

« *La maladie, la folie et la mort sont les anges noirs qui ont veillé sur mon berceau* »

EDVARD MUNCH

VOUS SAVIEZ DÉJÀ QUE LES MATHÉMATIQUES ÉTAIENT COMPLEXES !



Résumé

Les nombres complexes portent bien leur nom ! Ils interviennent partout : en algèbre, en analyse, en géométrie, en électronique, en traitement du signal, en musique, etc. Et en plus, ils n'ont jamais la même apparence : tantôt sous forme algébrique, tantôt sous forme trigonométrique, tantôt sous forme exponentielle, ... Leur succès vient en fait de deux propriétés : en travaillant sur les nombres complexes, tout polynôme admet un nombre de racines égal à son degré et surtout ils permettent de calculer facilement en dimension 2. Ce n'est pas clair ? Alors détaillons !

I) Découverte de l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

I.1. Approche historique

***Travail de l'élève* 1.**

Partie A : Activité 3 p 225 (recherche historique sur internet)

Partie B : Sur la trace des mathématiciens

Au début du XVI$^{\text{ème}}$ siècle, le mathématicien Scipione dal Ferro, propose une formule donnant une solution aux équations du 3$^{\text{ème}}$ degré de la forme $x^3 + px = q$ [1] :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q-\sqrt{q^2+4p^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{q^2+4p^3/27}}{2}}$$

Vous avez déjà rencontré et appliqué ces formules dans un devoir maison, pour résoudre l'équation

$$(\mathrm{E}) : x + x^2 + x^3 = 1$$

On avait effectué le changement de variable $\mathrm{X} = x + \frac{1}{3}$ et on avait montré que (E) $\iff \mathrm{X}^3 + \frac{2}{3}\mathrm{X} = \frac{34}{27}$.

La solution ressemblait à ceci : $\mathrm{X} = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{17-3\sqrt{33}}\right)$

Et donc $x = \mathrm{X} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{17-3\sqrt{33}} - 1\right)$.

Bref, easy ... Et bien on recommence !

1. Comme Bombelli à la fin de ce siècle, appliquez cette formule à l'équation $x^3 - 15x = 4$.
2. Quel problème survient ?

1. Vous pouvez essayer de le prouver en posant $x = u + v$ et en résolvant un système d'équations d'inconnues u et v.

3. Euler (XVIII^e) étant passé depuis Bombelli (XVI^e), notons nous aussi i le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$ (ce qui nous évite d'utiliser le symbole imaginaire $\sqrt{-1}$ qui n'a pas de sens, car contraire à la définition de la racine carré d'un nombre).
   Admettons désormais comme Bombelli, juste pour voir ce que cela donne, que l'on puisse prolonger les règles usuelles de calcul aux racines carrés de nombres négatifs et calculons $(2+i)^3$ et $(2-i)^3$
4. Quelle serait alors une solution réelle de l'équation ? Le vérifier.
5. Déterminer les réels a, b et c tels que $x^3 - 15x - 4 = (x-4)(ax^2 + bx + c)$
6. Déterminer alors toutes les solutions de l'équation $x^3 - 15x = 4$.

Une question naturelle s'est alors posée : peut-on légitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-dessus ? C'est ainsi qu'est née la théorie des nombres complexes, qui a mis bien longtemps à s'imposer et a déchaîné bien des passions ...

Partie C : A vous de jouer !

1. Essayez de compter un peu avec ces nombres, en simplifiant au maximum les expressions suivantes :

$$\mathrm{A} = (3+4i)^2 \qquad \mathrm{B} = (3-4i)^2 \qquad \mathrm{C} = (3+4i)(3-4i) \qquad \mathrm{D} = (3+4i)(i-1)$$

$$\mathrm{E} = (5-3i)(7-2i) \qquad \mathrm{F} = (i-2)(2+i) \qquad \mathrm{G} = (5+7i)(3-i)(2-3i) \qquad \mathrm{H} = \frac{6-4i}{2+3i}$$

2. Que constatez-vous ?

En 1637, **Descartes** propose l'appellation de « nombres imaginaires », mais c'est **Gauss** en 1831 qui le premier les nomme les « nombres complexes ».
Euler, déclarant que la notation $\sqrt{-1}$ est absurde car elle conduit à une contradiction de la définition, introduit la notation i (comme imaginaire) en 1777 pour le nombre qui vérifie $i^2 = -1$.
L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ apparaît alors : ce sont les nombres de la forme $a + ib$, avec a et b réels. Les règles de calculs dans $\mathbb{R}$ sont conservées.
Ce n'est qu'au XIX^e siècle que les nombres imaginaires prennent leur statut officiel de nombres, grâce au suisse **Argand** qui proposa une représentation géométrique de ces nombres. Ainsi, le nombre complexe $x + iy$ (x et y réels) est associé au point du plan de coordonnées $(x; y)$, ce qui entraîne l'unicité de l'écriture et l'absence d'ordre dans $\mathbb{C}$.
Ces nombres ont notamment servi pour formaliser la théorie de la relativité d'Einstein (1905). A votre niveau, ils sont utiles en géométrie et pour la résolution d'équations.

I.2. Approche ensembliste

L'équation $x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, mais elle admet une solution -1 dans un ensemble plus grand $\mathbb{Z}$.
De même, l'équation $3x = 1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$, mais elle admet $\frac{1}{3}$ comme solution dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ plus vaste que $\mathbb{Z}$
Et puis, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$; il faut chercher dans $\mathbb{R}$ pour en trouver.
En clair, quand une équation n'a pas de solutions, une démarche naturelle (et historique) pour en trouver consiste à en chercher dans un ensemble plus grand. Au stade de vos connaissances, l'ensemble numérique le plus grand est $\mathbb{R}$.
Pourtant l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$ ...
On va donc, dans ce chapitre « construire ? » enfin plutôt imaginer un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$ dans lequel l'équation $x^2 + 1 = 0$ possède des solutions. On l'appellera $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.
Le principal élément de $\mathbb{C}$ sera noté i (i comme imaginaire) et vérifiera $i^2 = -1$. L'équation précédente possédera alors deux solutions :

$$x^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow (x+i)(x-i) = 0 \Longleftrightarrow x = i \text{ ou } x = -i$$

On sait qu'il n'existe pas d'autres solutions dans un ensemble encore plus grand, notamment grâce à l'écriture factorisée (même si la démonstration est bien plus ardue que cela).
En fait c'est le cas de toutes les équations polynomiales à coefficients dans $\mathbb{C}$: elles admettent toutes leurs solutions dans $\mathbb{C}$ (en fait, autant que le degré de l'équation). On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.
Ainsi, je vous rassure, on ne construira pas d'ensemble de nombres plus grand que $\mathbb{C}$.

I.3. Approche géométrique

Comme je l'ai dit précédemment, au XIX^e siècle, Argand associe les nombres complexes aux points du plan.
Jusqu'à cette époque, l'existence de tels nombres étaient très controversées, malgré le fait qu'on leur ait trouvé une utilité certaine (comme résoudre des équations de degré 3).
C'est grâce à cela qu'on a pu établir une démonstration rigoureuse de l'existence de $\mathbb{C}$, en explicitant sa construction.
Cette démonstration n'est absolumment pas au programme, et même si vous pourriez en saisir quelques éléments, vous ne pourriez pas en saisir l'essence, vos connaissances sur les ensembles et leurs propriétés étant encore trop obscures et trop peu diversifiées (il existe des ensembles par exemple, où la multiplication n'est pas commutative, comme pour les ensembles de nombres : cf les matrices en spécialité).
Une idée de cette démonstration est présente en annexe, à la fin de ce cours, pour ceux qui souhaiteraient approfondir.
Sinon, retenez simplement la formalisation suivante, en admettant l'existance de i, comme vous l'avez fait quand on vous a parlé des nombres négatifs, ou encore des rationnels, puis des irrationnels, mais sans pouvoir mettre d'ordre de grandeur à i ni de sens concret.

I.4. Formalisation

Théorème 1. (Définition-Admis)

On définit un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$:
- muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$
- contenant un nombre i vérifiant $i^2 = -1$
- tel que chaque élément z de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de manière **unique** sous la forme :

$$z = x + i\,y \text{ avec } x \text{ et } y \text{ des nombres réels}$$

Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés **nombres complexes** ou encore **nombres imaginaires**.

Remarques :
- Le prolongement des opérations de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ signifie que l'on garde les propriétés calculatoires de $\mathbb{R}$ (associativité, commutativité, distributivité, élément neutre, inverse ...) en remplaçant simplement i^2 par -1, à chaque fois que vous le rencontrez.
- On évitera l'usage abusif du symbole radical $\sqrt{\ }$ qui reste réservé aux réels positifs.

II) L'ensemble $\mathbb{C}$ d'un point de vue algébrique

II.1. Forme algébrique d'un nombre complexe

II.1.a. Vocabulaire et première propriété

Définition 1.

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors il existe deux nombres réels x et y tels que $z = x + iy$.
⇝ L'écriture $x + iy$ (unique) est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z
⇝ Le réel x est la **partie réelle** de z et se note $\Re\mathrm{e}(z)$
⇝ Le réel y est la **partie imaginaire** de z et se note $\Im\mathrm{m}(z)$

Exemples :

Si $z = 3 - 4i$ alors 3 est sa partie réelle et -4 est sa partie imaginaire [a].
Soit $z' = 2 + 3i$.

1. Déterminer la forme algébrique de $z + z'$.
2. Donner les parties réelle et imaginaire de zz', puis de $iz - 3z'$

a. Pourquoi la vie des hommes est-elle complexe ? Parce qu'elle possède une partie réelle et une partie imaginaire ...

Attention !

La partie imaginaire est un **nombre réel** .

Remarques :

⇝ Si $\Im\mathrm{m}(z) = 0$ alors $z = \Re\mathrm{e}(z) + i0 = \Re\mathrm{e}(z)$, donc z est un réel et $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
⇝ Si $\Re\mathrm{e}(z) = 0$ alors $z = 0 + i\Im\mathrm{m}(z) = i\Im\mathrm{m}(z)$. On dit que z est un **imaginaire pur**.
L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$

Théorème 2. (Egalité de deux nombres complexes)

Soient x, y, x' et y' quatre nombres réels, alors :

$$x + iy = x' + iy' \iff x = x' \text{ et } y = y'$$

Preuve

⇝ Montrons dans un premier temps que

$$x + iy = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0$$

$\Leftarrow$) Si $x = 0$ et $y = 0$ alors $x + iy = 0$

$\Rightarrow$) Supposons que $y \neq 0$, dans ce cas on a : $i = -\dfrac{x}{y}$ et par conséquent $i \in \mathbb{R}$, or il n'existe pas de nombres réels tels que $i^2 = -1$. Notre hypothèse est donc absurde, ce qui signifie que $y = 0$ et donc $x + 0 = 0 \iff x = 0$

Preuve (Suite)

⇝ Considérons désormais deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ tels que et montrons que

$$z = z' \iff x + iy = x' + iy' \iff x = x' \text{ et } y = y'$$

⇐) Si $x = x'$ et $y = y'$ alors de manière évidente $z = z'$

⇒) Si $z = z'$ montrons que $x = x'$ et $y = y'$

Comme $z = z'$, on a $z - z' = 0 \iff x - x' + i(y - y') = 0$, par conséquent d'après la première partie de la démonstration :

$$x - x' = 0 \iff x = x' \qquad \text{et} \qquad y - y' = 0 \iff y = y'$$

Remarques :

⇝ Le résultat précédent peut s'énoncer de la manière suivante : deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales.

⇝ Dans $\mathbb{C}$, il n'y a pas de notion d'ordre, on ne pourra donc pas comparer deux nombres imaginaires.

Exercice(s) du livre : Déclic : n° **30**-33-35-**43** p 240

II.1.b. Conjugué d'un nombre complexe

Définition 2.

On considère un nombre complexe $z = x + iy$.
On appelle **conjugué** de z le nombre complexe, noté $\overline{z}$, tel que

$$\overline{z} = x - iy$$

On dit que z et $\overline{z}$ sont des **nombres complexes conjugués**.

Exemple :

Le conjugué de $z = 4 - 2i$ est $\overline{z} = 4 + 2i$, le conjugué de i est $-i$, de 7 est 7.

Remarque : On a $\Re\text{e}(z) = \Re\text{e}(\overline{z})$

Corollaire 1. (Critère pour qu'un nombre complexe soit réel (resp. imaginaire pur))

On a :

$$z + \overline{z} = 2\Re\text{e}(z) \qquad\qquad z - \overline{z} = 2i\Im\text{m}(z)$$

Et les propriétés suivantes :

$$z \text{ est réel} \iff z = \overline{z} \qquad \text{et } z \text{ est imaginaire pur} \iff z = -\overline{z}$$

Preuve **ROC**

Notons $z = x + iy$ avec x et y deux réels. Ainsi :

$$z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\Re\text{e}(z) \text{ et } z - \overline{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy = 2i\Im\text{m}(z)$$

Preuve (Suite)

On en déduit immédiatement que :

$$z \text{ est réel} \Longleftrightarrow \Im\mathrm{m}(z) = 0 \Longleftrightarrow z - \overline{z} = 0 \Longleftrightarrow z = \overline{z}$$

$$z \text{ est imaginaire pur} \Longleftrightarrow \Re\mathrm{e}(z) = 0 \Longleftrightarrow z + \overline{z} = 0 \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$$

Théorème 3.

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on a : $z\overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$

***Preuve* ROC**

$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y = x^2 + y^2$

Application

Pour écrire les nombres complexes fractionnaires sous la forme $x + iy$, i.e sous la forme algébrique on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée.

Exemple :

$$\frac{1}{3-4i} = \frac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i}{25} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

Exercice(s) du livre : Déclic : n° **39**-40 p 241

Propriété 1.

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

1. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{-z} = -\overline{z}$
3. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
4. $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$
5. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ (avec $z' \neq 0$)

***Preuve* ROC**

Soit $z = x + iy$ et $z' = x - iy$ (avec x, y, x' et y' réels), et $n \in \mathbb{N}^*$ alors :

$$\overline{z+z'} = \overline{x+iy+x'+iy'} = \overline{x+x'+i(y+y')} = x + x' - i(y+y')$$

$$\overline{z} + \overline{z'} = \overline{x+iy} + \overline{x'+iy'} = x - iy + x' - iy' = x + x' - i(y+y')$$

Par conséquent $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

On démontre de manière similaire les autres égalités, avec une petite récurrence pour la quatrième.

Exemples :

Déterminer les formes algébriques des conjugués des nombres complexes suivants :

$$z = \frac{4-5i}{3+i} \qquad\qquad z = \frac{1}{2+i}$$

Application

Si un polynôme, à coefficients réels, admet un nombre complexe z comme racine alors $\overline{z}$ est aussi une racine de P puisque, d'après les propriétés de la conjugaison (qui commute avec les exposants, les produits et les sommes) :

$$\mathrm{P}(\bar{z})) = \overline{\mathrm{P}(z)}$$

Et donc si $\mathrm{P}(z) = 0$ alors $\overline{\mathrm{P}(z)} = 0$ d'où $\mathrm{P}(\overline{z}) = 0$

Exemple :

On donne $\mathrm{P}(x) = x^2 + 1$. Déterminer les racines de P et vérifier qu'elles sont conjuguées.

Vérifier que le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est racine de $\mathrm{Q}(x) = x^2 + x + 1$. Donner une autre racine de Q.

II.2. Equations du second degré à coefficients réels

II.2.a. Equation $\mathrm{X}^2 = a$ où $a \in \mathbb{R}$

Travail de l'élève **2.** L'objectif de l'activité est de résoudre dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\mathrm{X}^2 = a$, avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler les solutions de l'équation $\mathrm{X}^2 = a$ dans le cas où $a \geq 0$.

2. On cherche ensuite à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 = -3$.

- **a.** Vérifier que $i\sqrt{3}$ est solution dans $\mathbb{C}$ de cette équation.
- **b.** En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de cette équation.

3. On cherche désormais à généraliser notre raisonnement et à trouver toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\mathrm{X}^2 = a$ dans le cas $a < 0$.

- **a.** Vérifier que $a = \left(i\sqrt{-a}\right)^2$.
- **b.** En déduire que l'équation considérée possède deux solutions complexes que l'on précisera.

Proposition 1.

L'équation $\mathrm{X}^2 = a$ possède deux solutions dans $\mathbb{C}$:

- Si $a \geq 0$ ce sont les réels suivants : $\mathrm{X} = \sqrt{a}$ ou $\mathrm{X} = -\sqrt{a}$
- Si $a < 0$, ce sont les imaginaires purs conjugués suivants : $\mathrm{X} = i\sqrt{-a}$ ou $\mathrm{X} = -i\sqrt{-a}$

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 + \frac{3}{4} = 0 \qquad z^2 = \cos^2\theta - 1 \qquad x + \frac{1}{x} = 0$$

II.2.b. Equations $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$

Travail de l'élève **3.** L'objectif de l'activité est de résoudre dans $\mathbb{C}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et c réels tels que $a \neq 0$.

1. Rappeler le discriminant Δ de cette équation, ainsi que les solutions de l'équation $ax^2 + b + c = 0$ dans le cas où $\Delta \geq 0$.
2. On cherche ensuite à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2x^2 - 3x + 4 = 0$.
   - **a.** Calculer le discriminant Δ de cette équation. Quel problème survient ?
   - **b.** Ecrire Δ sous la forme d'un carré de nombre complexe.
   - **c.** Vérifier que le nombre $x_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ est solution de l'équation considérée.
   - **d.** Quelle est alors l'autre solution de l'équation ?
3. On cherche désormais à généraliser notre raisonnement et à trouver toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans le cas le discriminant Δ est strictement négatif.

   On rappelle que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ peut s'écrire de manière équivalente $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$.
   - **a.** Vérifier que $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$.
   - **b.** En remplaçant Δ par cette nouvelle écriture, résoudre alors l'équation considérée.

Théorème 4.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, b et c réels possède (une ou) deux solutions dans $\mathbb{C}$:

⇝ Si $\Delta \geq 0$, ce sont les réels suivants :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

⇝ Si $\Delta < 0$, ce sont les complexes conjugués suivants :

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exemple :

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \qquad 2z^4 + z^2 - 10 = 0$$

<u>**Exercice(s) du livre**</u> : Déclic : n° 44-**45**-**46**-47-**49**-**52** p 241

III) L'ensemble $\mathbb{C}$ d'un point de vue géométrique

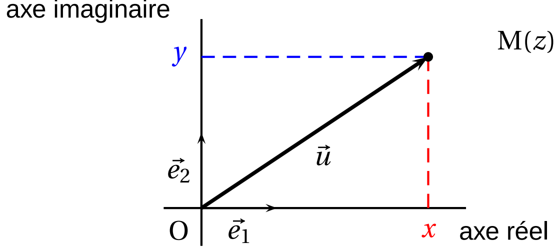
III.1. Interprétation géométrique : le plan complexe

Dans tout le reste du chapitre, on munit un plan orienté d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Définition 3.

À tout nombre complexe $z = x + iy$, avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, on associe le point M de coordonnées (x, y) qu'on appelle **image** du complexe $z = x + iy$. On le note souvent $M(z)$.
Réciproquement, à tout point M du plan de coordonnées (x, y), on associe l'**affixe** $z = x + iy$, qu'on note souvent z_M.
Enfin, à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ de coordonnées (x, y) on associe une affixe $z_{\vec{u}} = x + iy$ et réciproquement.

Illustration :



Exemples :

$z = 2 - 5i$ correspond au point $M(2; -5)$ et réciproquement.
L'affixe du point M est le nombre complexe $z_M = 2 - 5i$.
L'affixe de $\vec{e_1}$ est $z_{\vec{e_1}} = 1$. celle de $\vec{e_2}$ est $z_{\vec{e_2}} = i$.

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3 + i$, $z_B = -3i$, $z_C = -1$ dans un repère orthonormé direct du plan et tracer $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$.
2. Quelle est l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{OA}$? $-\overrightarrow{OA}$? $\overrightarrow{AB}$?

Remarques :

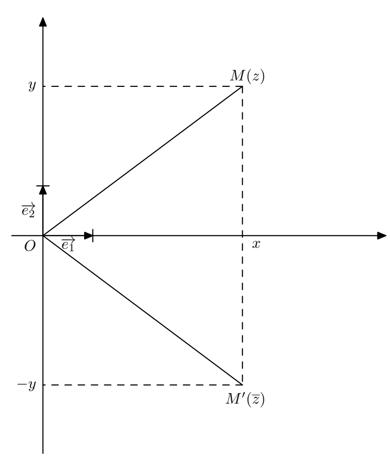
⇝ On a ainsi identifié le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct et l'ensemble $\mathbb{C}$, ce qui justifie l'appellation **plan complexe** de ce type de plan.

⇝ Les réels étaient déjà identifiés depuis la seconde à une droite (incluse dans le plan)

⇝ Cette identification justifie que l'on ne peut pas prolonger à $\mathbb{C}$ la relation d'ordre de $\mathbb{R}$, car cela reviendrait à comparer deux points du plan, ou deux vecteurs, ce qui n'a pas de sens.

⇝ L'unicité des coordonnées dans le plan implique aussi l'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe (même si nous l'avons déjà démontré autrement).

⇝ Interprétation géométrique du conjugué :
Les images de deux nombres complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des réels.
En effet, un nombre complexe et son conjugué ont même partie réelle (abscisse) et des parties imaginaires opposées (ordonnées).



III.2. Premiers calculs géométriques

Propriété 2.

Soient $\mathrm{M}(z)$ et $\mathrm{M}'(z')$ les points du plan complexe.
Un point S a pour affixe $z+z'$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}'}$.
Autrement dit : l'affixe d'une somme de deux vecteurs est la somme des affixes de ces deux vecteurs :

$$z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$$

Preuve

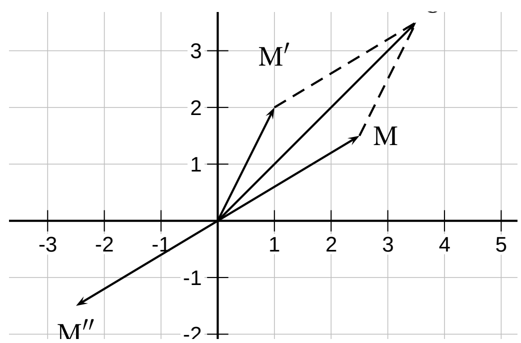
On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec $x,\ y, x', y'$ quatre réels. Notons que $z + z' = (x+x') + i(y+y')$

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}'} \iff \overrightarrow{\mathrm{OS}} = xe_1 + ye_2 + x'e_1 + y'e_2 = (x+x')e_1 + (y+y')e_2$$
$$\iff \text{S a pour affixe } (x+x') + i(y+y') \iff z_{\mathrm{S}} = z + z'.$$

Remarque : Les points $\mathrm{M}(z)$ et $\mathrm{M}'(-z)$ sont symétriques par rapport à l'origine O.
En effet $z + (-z) = 0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}'} = \overrightarrow{\mathrm{OO}} = \vec{0}$.

Exemple :

Soient les points $\mathrm{M}(2.5+1.5i)$ et $\mathrm{M}'(1+2i)$.
Alors le point S d'affixe $z_{\mathrm{S}} = z_{\mathrm{M}} + z_{\mathrm{M}'} = 3.5 + 3.5i$ est le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}'}$.
Le point M'' d'affixe $z_{\mathrm{M}''} = -z_{\mathrm{M}} = -2.5 - 1.5i$ est le symétrique de M par rapport à l'origine O.



Propriété 3.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives z_{A}, z_{B} et z_{C}. Alors :

⇝ L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est : $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}$

⇝ L'affixe du point I milieu de [AB] est : $z_{\mathrm{I}} = \dfrac{z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}}}{2}$

⇝ L'affixe du centre de gravité G du triangle ABC est : $z_{\mathrm{G}} = \dfrac{z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}} + z_{\mathrm{C}}}{3}$

***Preuve* ROC**

⇝ Notons $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}; y_{\mathrm{A}})$ et $\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}; y_{\mathrm{B}})$. Alors $z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} = (x_{\mathrm{B}} + iy_{\mathrm{B}}) - (x_{\mathrm{A}} + iy_{\mathrm{A}}) = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} + i(y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})$

D'autre part, on sait déjà que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \begin{pmatrix} x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} \end{pmatrix}$, donc l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = \left(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} + i(y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})\right)$

Par conséquent on a bien $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}$

⇝ Le point I est le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

⇝ Le point G est le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$

Exemple :

Soient les points $\mathrm{A}(-3+i)$, $\mathrm{B}(5+7i)$ et $\mathrm{C}(4+i)$.
Alors le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour affixe

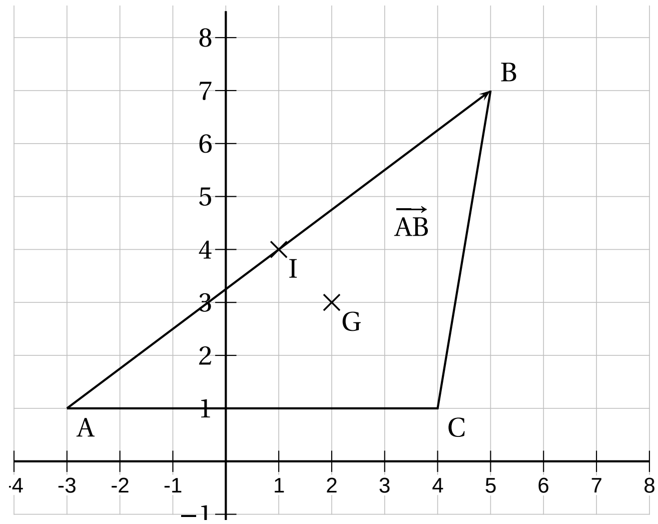
$$z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} = 8+6i$$

Le milieu I de $[\mathrm{AB}]$ est le point d'affixe

$$z_{\mathrm{I}} = \frac{z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{B}}}{2} = 1+4i$$

Le centre de gravité G du triangle ABC est le point d'affixe

$$z_{\mathrm{G}} = \frac{z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{B}}+z_{\mathrm{C}}}{3} = 2+3i$$



Remarque : Ces applications permettent de traduire des problèmes géométriques en relations entre nombres complexes.

Exercice 1 : Déterminer le lieu des points M d'affixe z telle que $\dfrac{iz-1}{z-i}$ soit réel.

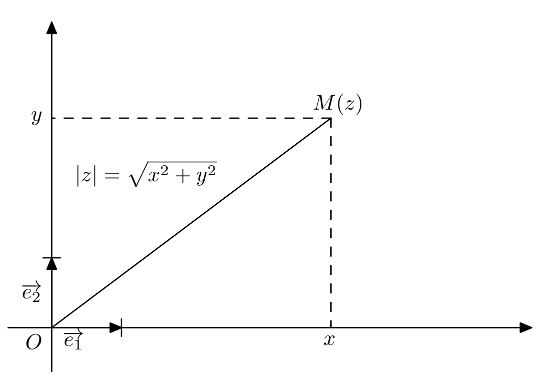
Exercice(s) du livre : Déclic : n° 53-54-**55-57-78** p 242

III.3. Calculs de distances et d'angles orientés

III.3.a. Module d'un nombre complexe

Définition 4. (Proposition)

On considère z un nombre complexe tel que $z = x+iy$ (x et y réels) et M son image dans le plan complexe.
Le **module** de z, noté $|z|$, est la distance OM.
$|z|$ est donc un nombre réel positif ou nul et on a $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.



Remarques :

- Si z est l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ alors $z = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}$ et $|z|$ représente la distance AB :

$$\mathrm{AB} = ||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|| = |z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}| = |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}|$$

- On a $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ ou encore $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$
- Si $z = x+iy$ est réel alors $y = \Im\mathrm{m}(z) = 0$ et on a

$$|z| = \sqrt{x^2} = |x|$$

Le module d'un nombre réel est donc sa valeur absolue, ce qui justifie la notation, et généralise la valeur absolue d'un nombre réel.

Exemples :

Si $z=3-4i$, alors $|z|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$. Si $z=9i$ alors $|z|=\sqrt{9^2}=9$.
On donne les points A et B d'affixe respective $z_A=-1+4i$ et $z_B=2-i$. Calculer la distance AB.
Soient $D(4i)$, $E(3)$ et $F(6+8i)$. Quelle est la nature du triangle DEF ?

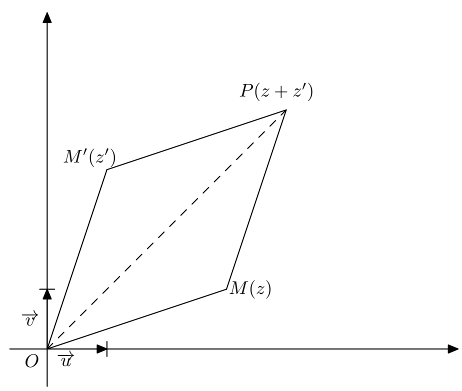
Propriété 4.

Soit $z\in\mathbb{C}$. Alors :

1. $|z|=0 \Longleftrightarrow z=0$
2. Si $z=x+iy$ alors $|z|\geq max(|x|,|y|)$
3. $|zz'|=|z||z'|$
4. $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$
5. $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ (inégalité triangulaire)

Preuve **ROC pour 1-3-4**

1. $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=0 \Longleftrightarrow x^2+y^2=0 \Longleftrightarrow x=0$ et $y=0$ car $x,y\in\mathbb{R}$
2. $x\leq\sqrt{x^2}\leq\sqrt{x^2+y^2}=|z|$ et de même $y\leq\sqrt{y^2}\leq\sqrt{x^2+y^2}=|z|$
3. $$|zz'|^2=zz'\times\overline{zz'}=zz'\times\overline{z}\times\overline{z'}=z\overline{z}\times z'\overline{z'}=|z|^2|z'|^2$$
   Comme un module est positif on obtient : $|zz'|=|z||z'|$
4. $$\left|\frac{z}{z'}\right|^2=\frac{z}{z'}\times\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{z\times\overline{z}}{z'\times\overline{z'}}=\frac{|z|^2}{|z'|^2}$$
   Comme un module est positif on obtient : $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$
5. Pour comprendre l'inégalité triangulaire il suffit d'observer cette figure ci-contre.
   On a bien $OP\leq OM+OM'$
   et donc $|z+z'|\leq|z|+|z'|$



Preuve (Suite)

Démonstration plus rigoureuse :

Comme les deux membres de l'inégalité sont positifs, il suffit donc de comparer les carrés de chaque membre.

Or $$|z+z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')} = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = |z|^2 + (z\overline{z'}+\overline{z}z') + |z'|^2$$

Et $$(|z|+|z'|)^2 = |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2$$

Il s'agit donc de comparer $(z\overline{z'}+\overline{z}z')$ et $2|zz'|$.

Or $z\overline{z'}+\overline{z'}z = z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} = 2\Re(zz') \leq 2|zz'|$ d'après la propriété 2. Donc

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + (z\overline{z'}+\overline{z}z') + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2 = (|z|+|z'|)^2$$

Exemple :

Soient u et v deux nombres complexes distincts et de même module r. Montrer que $\dfrac{u+v}{u-v}$ est un imaginaire pur.

On a :

$$\overline{\left(\frac{u+v}{u-v}\right)} = \frac{\overline{u}+\overline{v}}{\overline{u}-\overline{v}} = \frac{uv\overline{u}+uv\overline{v}}{uv\overline{u}-uv\overline{v}} = \frac{|u|^2v+u|v|^2}{|u|^2-u|v|^2} = \frac{r^2v+ur^2}{r^2-ur^2} = -\frac{u+v}{u-v}$$

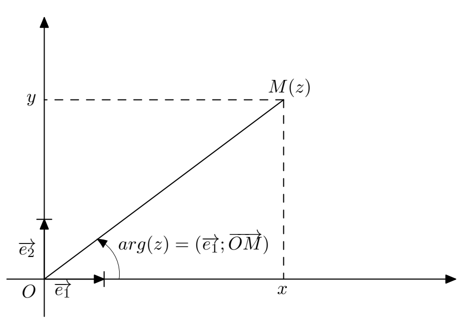
Ce qui prouve que $\dfrac{u+v}{u-v}$ est un imaginaire pur.

Exercice(s) du livre : Déclic : n° **59-60** p 243

III.3.b. Argument d'un nombre complexe

Définition 5.

Soit z un nombre complexe **non nul** d'image M dans le plan complexe.
On appelle **argument** de z, noté $\arg(z)$ toute mesure, en radians, de l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}})$.



Remarques :

- Un nombre complexe possède une infinité d'arguments !
  En effet si θ est un argument de z, tout autre argument est de la forme $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
  L'unique argument appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$ s'appelle l'**argument principal**.
  On notera par exemple $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}\quad [2\pi]$ (se lit « modulo 2π ») pour signifier que $\arg(z)$ peut-être égal à $\dfrac{\pi}{4}$ mais aussi à n'importe lequel des nombres $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Si z est l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ alors $z = z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}$.
  Par conséquent, $\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \arg(z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A})\quad [2\pi]$.

Attention !

Le nombre complexe $z = 0$ ne possède pas d'argument car, dans ce cas, l'angle $(\overrightarrow{e_1}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}})$ ne se définit pas.

Exemple :
On voit clairement, de part leur position dans le plan complexe, que :

$$\arg(i) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \qquad \arg(1) = 0 \quad [2\pi] \qquad \arg(-1) = \pi \quad [2\pi] \qquad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \qquad \arg(i+1) = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

Mais ce n'est pas toujours aussi simple !

Remarques :

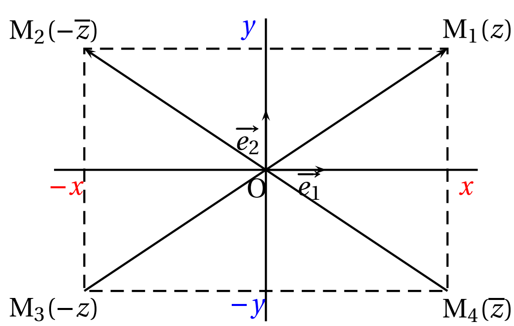
- Si $z \in \mathbb{R}^+$ alors $\arg(z) = 0[2\pi]$, si $z \in \mathbb{R}^-$ alors $\arg(z) = \pi[2\pi]$
- De la même manière un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement positive a un argument égal à $\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement négative a un argument égal à $-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
  Par conséquent :
  $$z \in \mathbb{R}^* \iff \arg(z) = 0\,[\pi]$$
  $$z \in i\mathbb{R}^* \iff \arg(z) = \frac{\pi}{2}\,[\pi]$$

Propriété 5.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$:

1. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\,[2\pi]$
2. $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\,[2\pi]$
3. $\arg(-\overline{z}) = \pi - \arg(z)\,[2\pi]$

Preuve
Les trois propriétés se déduisent immédiatement de la figure suivante :



Exercice(s) du livre : Déclic : n° 61-62-63-**64**-66 p 243

III.4. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

III.4.a. Définition

Théorème 5.

Soient $z \in \mathbb{C}^*$, $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
z a pour module r et pour argument θ modulo 2π si et seulement si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
Cette écriture s'appelle une **forme trigonométrique** de z, elle n'est pas unique (puisque θ ne l'est pas).

Preuve

($\Rightarrow$) On applique Pythagore (cf illustration ci-dessus).

($\Leftarrow$) Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors $|z|^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 \Longleftrightarrow |z| = r$ puisque $r > 0$.

De plus, si θ' est un argument de z alors, d'après l'implication précédente :

$$z = r(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

Par conséquent $\theta' = \theta[2\pi]$ et donc θ est un argument de z.

Remarques :

- Le nombre complexe nul n'a pas de forme trigonométrique (puisque pas d'argument)
- L'argument d'un nombre complexe n'étant pas unique, il en va de même de la forme trigonométrique, contrairement à la forme algébrique.
- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même module et des arguments égaux à un multiple de 2π près.

Exemples :

- Déterminer deux autres formes trigonométriques du nombre $z = 3\left[\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right]$
- Déterminer la forme algébrique du nombre complexe z de module $\sqrt{5}$ et dont un argument est $\frac{2\pi}{3}$
- Déterminer une forme trigonométrique de $z = -2\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$
- Déterminer la forme algébrique et une forme trigonométrique de $z = -5\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

III.4.b. Méthode calculatoire pour trouver l'argument d'un nombre complexe

Méthode

Soient $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x + iy$.

- On calcule le module de z.
- On factorise l'écriture de z par $|z|$: $z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right)$
- On reconnait alors la valeur d'un angle remarquable θ (ou d'un angle associé grâce à la configuration du rectangle dans le cercle trigonométrique) tel que $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{y}{|z|}$

Exemple :

Reprenons l'exemple de $z = 1 + i$.

On a $|z| = \sqrt{2}$ et $z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Or $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Donc un argument de z est bien $\frac{\pi}{4}$.

De même, calculer l'argument principal de $z = \sqrt{3} + i$, $z' = -\sqrt{3} + i$ et de leur conjugués.

En déduire leur écriture trigonométrique correspondante.

Remarque : Il arrivera rarement que l'argument ne soit pas une valeur remarquable. Dans ce cas, on utilisera la calculatrice.

Résumé

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ de forme algébrique $z = x + iy$, de module r et d'argument principal θ. Alors :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta \text{ tel que } \quad \cos\theta = \dfrac{x}{r} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

III.4.c. Conséquences sur l'argument

Propriété 6.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$:

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi]$
2. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\,[2\pi]$
3. $\arg(z^n) = n \times \arg(z)\,[2\pi]$

Preuve **ROC**

1. Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, alors

$$zz' = rr'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')]$$

Vous qui connaissez parfaitement vos formules d'addition (vu en première), vous en déduisez que

$$zz' = rr'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$$

Ainsi, nous arrivons au résultat capital : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi]$

2. $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) + \arg(z) = \arg(\dfrac{1}{z} \times z) = \arg(1) = 0\,[2\pi]$, donc $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\,[2\pi]$

Alors $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \dfrac{1}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\,[2\pi]$

3. Montrons déjà par récurrence la propriété sur les entiers naturels. Soit $\mathscr{P} : \arg(z^n) = n \times \arg(z)\,[2\pi]$.
   - Initialisation :
     Si $n = 0$ alors $\arg(z^0) = \arg(1) = 0\,[2\pi]$. Donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - Hérédité : Supposons qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. Montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ l'est, ie $\arg\left(z^{k+1}\right) = (k+1) \times \arg(z)\,[2\pi]$.

$$\begin{aligned} \arg\left(z^{k+1}\right) &= \arg(z \times z^k)\,[2\pi] \\ &= \arg(z) + \arg(z^k)\,[2\pi] && \text{d'après 4)} \\ &= \arg(z) + k\arg(z)\,[2\pi] && \text{(HR)} \\ &= (k+1)\arg(z)\,[2\pi] \end{aligned}$$

     Donc $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
   - Conclusion $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Enfin, montrons la propriété $\forall n \in \mathbb{Z}$. Si $n < 0$, alors

$$\arg(z^n) = \arg\left(\frac{1}{z^{-n}}\right) = \arg\left(\left(\frac{1}{z}\right)^{-n}\right) = -n\arg\left(\frac{1}{z}\right) = n\arg(z)\,[2\pi]$$

Remarques :

⇝ Les formes algébriques sont pratiques pour les additions

⇝ Les formes trigonométriques sont pratiques pour les multiplications :

- **Pour multiplier** deux nombres complexes *non nuls*, on **multiplie les modules** et on **additionne les arguments**.
- **Pour diviser** deux nombres complexes *non nuls*, on **divise les modules** et on **soustrait les arguments**

Exemples :

⇝ Déterminer une forme trigonométrique de $z = \dfrac{1}{1+i}$ et de $z' = (1+i)\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{4}\right)$

⇝ Déterminer une forme trigonométrique de $z = -2\sqrt{3}+2i$ puis de $z' = 3-4i$.
En déduire une forme trigonométrique de zz' et de $\dfrac{z}{z'}$

⇝ Soit $z = 3\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ et $z' = 2\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$. Calculer zz'.

III.4.d. Notation Exponentielle

Soit f est la fonction qui à tout réel θ, associe le nombre complexe $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Pour tous réels θ et θ' on a :

$$\begin{aligned} f(\theta+\theta') &= \cos\left(\theta+\theta'\right)+i\sin\left(\theta+\theta'\right) \\ &= (\cos\theta+i\sin\theta)\times\left(\cos\theta'+i\sin\theta'\right) \qquad \text{car } \arg(z)+\arg(z') = \arg(zz')\ [2\pi] \\ &= f(\theta)\times f(\theta') \end{aligned}$$

Ainsi, f transforme les sommes en produit et on retrouve la même propriété algébrique que pour la fonction exponentielle. Pour cette raison, on adopte la **notation** $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, qui s'avèrera fort commode pour les calculs.

Définition 6.

Pour tout réel θ on note :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.
Ainsi, tout nombre complexe z non nul, de module r et d'argument θ admet une écriture du type $z = re^{i\theta}$, appelée **forme exponentielle** de z.

Remarques :

⇝ Cette écriture n'est pas unique puisqu'elle dépend de l'argument choisi.

⇝ Il s'agit d'une notation, pas du calcul de $e^{i\theta}$ ...

⇝ Remarquons que cette écriture présente de nombreux avantages, en plus d'alléger la notation trigonométrique. En effet, considérons deux nombres complexes z et z' de module r et r' et d'argument θ et θ', alors on a vu que le module de zz' est rr' et l'argument de zz' est $\theta+\theta'$. Observons le calcul suivant :

$$zz' = re^{i\theta}r'e^{i\theta'} = rr'e^{i\theta+i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

On retrouve donc le module et l'argument du nombre complexe zz' en utilisant les règles de calculs sur les puissances.

Exemples :

$$e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$e^{2i\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 \qquad e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2} = -i$$

Dans le plan complexe, placer les points suivants :

$$\mathrm{A}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \quad \mathrm{B}\left(-2e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \quad \mathrm{C}\left(e^{-5i\frac{\pi}{6}}\right) \quad \mathrm{D}\left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$$

Remarque : Le conjugué de $e^{i\theta}$ est $\overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos\theta + i\sin(-\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$

Propriété 7.

$\forall\theta$ et θ' de $\mathbb{R}$ on a :

$$e^{i\theta}\times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \text{ pour tout } n\in\mathbb{Z}$$

Preuve

Simple transcription des propriétés vues sur les arguments.

Exemples :

- Soient $z = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z' = 5e^{i\frac{\pi}{12}}$, donner une forme exponentielle de zz' et de $\dfrac{z}{z'}$
- On note $z_1 = 1+i$ et $z_2 = \sqrt{3}-i$. Déterminer les formes exponentielles de z_1 et z_2.

  En déduire la forme exponentielle du nombre complexe $z = \dfrac{z_1^4}{z_2^3}$
- Calculer $(1+i)^{14}$

Enigme[2] : Trouver l'erreur dans le calcul suivant :

$$\begin{aligned} & e^{i2\pi} = 1 \\ \Longleftrightarrow\quad & \left(e^{i2\pi}\right)^x = 1^x = 1 \\ \Longleftrightarrow\quad & e^{i2\pi x} = 1 \\ \text{pour } x = \frac{1}{4} \text{ on obtient :}\quad & e^{i\frac{\pi}{2}} = 1 \\ \text{d'où :}\quad & i = 1 \end{aligned}$$

Exercice(s) du livre : Déclic : n° 67-**68 à 70**-71-**73-76-84** p 244

2. Réponse : La relation $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ n'est valable que si $n\in\mathbb{Z}$

III.5. Applications géométriques

III.5.a. Interprétation des modules et arguments

Propriété 8.

Soient A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Alors :

$$\left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = \frac{CD}{AB} \qquad \text{et } \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\ [2\pi]$$

Preuve

$$\left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = \frac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|} = \frac{CD}{AB}.$$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \left(\vec{e_1};\overrightarrow{CD}\right) - \left(\vec{e_1};\overrightarrow{AB}\right) = \left(\vec{e_1};\overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{AB};\vec{e_1}\right) = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\ [2\pi]$$

Conséquences

Les points A, B et C sont alignés $\iff \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = 0\ [\pi] \iff \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \in \mathbb{R}$

Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires $\iff \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$

Caractérisation des cercles et des médiatrices

⇝ Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon R.

$$M(z) \in \mathscr{C} \iff \Omega M = R \iff |z - \omega| = R$$

⇝ Soit Δ la médiatrice d'un segment [AB] avec $A(z_A)$ et $B(z_B)$.

$$M(z) \in \Delta \iff MA = MB \iff |z - z_A| = |z - z_B|$$

Exemple :

Soit z un nombre complexe différent de 1 et M son point image dans le plan complexe. On pose $Z = \frac{z+i}{z-1}$.

Déterminer l'ensemble :

⇝ $\mathscr{E}$ des points M tel que $Z \in \mathbb{R}$.

⇝ $\mathscr{F}$ des points M tel que $|Z| = 1$.

⇝ $\mathscr{G}$ des points M tel que $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Proposition 2.

Dans le plan complexe, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r et un point M d'affixe z. Alors :

$$\mathrm{M}(z) \in \mathscr{C} \iff z = \omega + re^{i\theta} \quad \text{avec} \theta \in [0;2\pi[$$

Preuve

On sait que $\mathrm{M}(z) \in \mathscr{C} \iff \mathrm{M}\Omega = r \iff |z-\omega| = r$.
On appelle θ la mesure principal $\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}\right)$. Alors : $\mathrm{M}(z) \in \mathscr{C} \iff z-\omega = re^{i\theta}$.

Remarque : Cette égalité est appelée équation paramétrique du cercle $\mathscr{C}$.

Exemple :

L'ensemble des points d'affixes $z = 4i+2+3e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0;2\pi[$ représente le cercle de centre $\Omega(4i+2)$ et de rayon 3.

Exercice 2 :

On désigne par I, A et B les points d'affixes respectives 1, $2i$ et $3+i$.

1. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.
2. Calculer l'affixe z_C du point C image de A par la symétrie de centre I.
3. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{z_\mathrm{C}-z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{A}-z_\mathrm{B}}$
   En déduire le module et un argument de ce nombre ; ainsi qu'une interprétation géométrique.
4. Soit D le point d'affixe z_D telle que $z_\mathrm{D}-z_\mathrm{C} = z_\mathrm{A}-z_\mathrm{B}$, montrer que ABCD est un carré.
5. Pour tout point M du plan, on considère le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}+\overrightarrow{\mathrm{MD}}$
   a. Exprimer $\vec{u}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MI}}$
   b. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tel que : $||\vec{u}|| = 2||\overrightarrow{\mathrm{AB}}||$.
   Construire Γ.

Exercice(s) du livre : Déclic : n° **75-77**-80-81-**82-85-86**-87**88-89-92-93**-94 p 245

III.5.b. Lieux de points typiques

On cherche le lieu géométrique des points M(z) tels que :

1. $|z-z_1| = k$, avec $k \in \mathbb{R}$:
   - ⇝ On pose A(z_1) et dans ce cas : $|z-z_1| = k \iff \mathrm{AM} = k$.
   - ⇝ Donc, les points M cherchés sont tous ceux situés à une distance k du pont A.
   - ⇝ Ainsi, l'ensemble des points M(z) cherché est :
     - Si $k>0$: **le cercle de centre** A **et de rayon** k
     - Si $k=0$: le point A
     - Si $k<0$: l'ensemble vide
2. $|z-z_1| = |z-z_2|$:
   - ⇝ On pose A(z_1) et B(z_2) et dans ce cas $|z-z_1| = |z-z_2| \iff \mathrm{MA} = \mathrm{MB}$.
   - ⇝ Donc les points M cherchés sont tous ceux situés à égale distance de A et B.
   - ⇝ Ainsi, l'ensemble des points M(z) cherché est **la médiatrice du segment** [AB]

3. $\arg\left(\dfrac{z-z_2}{z-z_1}\right)=\pi \quad [2\pi]$.

⇝ On pose $A(z_1)$ et $B(z_2)$ et dans ce cas :

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z-z_2}{z-z_1}\right)=0 \quad [2\pi] &\iff \left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)=\pi \quad [2\pi]\\ &\iff \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\pi \quad [2\pi]\end{aligned}$$

⇝ Donc les points A, M, B sont alignés dans cet ordre.

⇝ Ainsi, l'ensemble des points $M(z)$ cherché est **le segment** [AB] **privé de** A **et** B**.**
on enlève les points A et B, car sinon l'argument n'est pas défini

4. $\arg\left(\dfrac{z-z_2}{z-z_1}\right)=0 \quad [2\pi]$.

⇝ On pose $A(z_1)$ et $B(z_2)$ et dans ce cas :

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z-z_2}{z-z_1}\right)=0 \quad [2\pi] &\iff \left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)=0 \quad [2\pi]\\ &\iff \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=0 \quad [2\pi]\end{aligned}$$

⇝ Donc les points M, A, B sont alignés dans cet ordre. ou dans l'ordre A, B, M.

⇝ Ainsi, l'ensemble des points $M(z)$ cherché est **la droite** (AB) **privée du segment** [AB]**.**

5. $\arg\left(\dfrac{z-z_2}{z-z_1}\right)=0 \quad [\pi]$.

⇝ On pose $A(z_1)$ et $B(z_2)$ et dans ce cas :

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z-z_2}{z-z_1}\right)=0 \quad [\pi] &\iff \left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)=0 \quad [\pi]\\ &\iff \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=0 \quad [\pi]\\ &\iff \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=0 \quad [2\pi] \quad \text{ou} \quad \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\pi \quad [2\pi]\end{aligned}$$

⇝ Donc les points M, A, B sont alignés (peu importe l'ordre).

⇝ Ainsi, l'ensemble des points $M(z)$ cherché est **la droite** (AB) **privée de** A **et** B**.**
On enlève les points A et B, car sinon l'argument n'est pas défini

6. $\arg\left(\dfrac{z-z_2}{z-z_1}\right)=\dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$.

⇝ On pose $A(z_1)$ et $B(z_2)$ et dans ce cas :

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z-z_2}{z-z_1}\right)=\frac{\pi}{2} \quad [\pi] &\iff \left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{2} \quad [\pi]\\ &\iff \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2} \quad [\pi]\\ &\iff \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\pm\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]\end{aligned}$$

⇝ Donc le triangle MAB est rectangle en M (de sens direct ou indirect).

⇝ Ainsi, l'ensemble des points $M(z)$ cherché est **le cercle de diamètre** [AB] **privé des points** A **et** B**.**
On enlève les points A et B, car sinon l'argument n'est pas défini

7. $\arg\left(\dfrac{z-z_2}{z-z_1}\right)=\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

⇝ On pose $A(z_1)$ et $B(z_2)$ et dans ce cas :

$$\arg\left(\frac{z-z_2}{z-z_1}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\quad\Longleftrightarrow\quad\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$$
$$\Longleftrightarrow\quad\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$$

⇝ Donc le triangle MAB est rectangle en M de sens direct.

⇝ Ainsi, l'ensemble des points $M(z)$ cherché est **le demi-cercle de diamètre** [AB] **privé des points** A **et** B **et tel que** MAB **soit direct.**
On enlève les points A et B, car sinon l'argument n'est pas défini

8. $\arg\left(\frac{z-z_2}{z-z_1}\right)=-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi].$

⇝ On pose $A(z_1)$ et $B(z_2)$ et dans ce cas :

$$\arg\left(\frac{z-z_2}{z-z_1}\right)=-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\quad\Longleftrightarrow\quad\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)=-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$$
$$\Longleftrightarrow\quad\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$$

⇝ Donc le triangle MAB est rectangle en M de sens indirect.

⇝ Ainsi, l'ensemble des points $M(z)$ cherché est **le demi-cercle de diamètre** [AB] **privé des points** A **et** B **et tel que** MAB **soit indirect.**
On enlève les points A et B, car sinon l'argument n'est pas défini

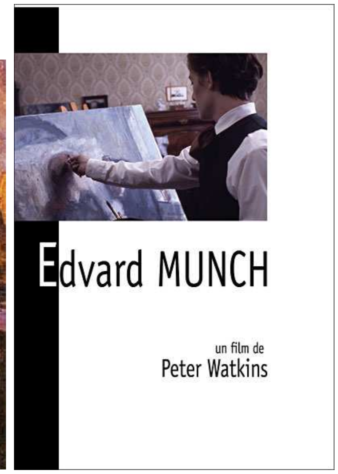
9. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$, avec A et B deux points du plan complexe.

⇝ Les points M cherchés sont ceux tels que le triangle MAB soit rectangle en M (direct ou indiret)

⇝ Ainsi, l'ensemble des points $M(z)$ cherché est **le cercle de diamètre** [AB] .

« " J'étais en train de marcher le long de la route avec deux amis - le soleil se couchait - soudain le ciel devint rouge sang – j'ai fait une pause, me sentant épuisé, et me suis appuyé contre la grille - il y avait du sang et des langues de feu au-dessus du fjord bleu-noir et de la ville - mes amis ont continué à marcher, et je suis resté là tremblant d'anxiété - et j'ai entendu un cri infini déchirer la Nature" »

MUNCH, Edvard



Edvard Munch - Das kranke Mädchen [The Sick Girl]
© Munch Museum/Munch-Ellingsen Group, BONO, Oslo/DACS, London 2004

Dans l'ordre :

⇝ *Le cri* (1893)

⇝ *?*

⇝ *Film de Peter Watkins* (1973)

⇝ *L'enfant malade* (1885-86)

⇝ *Le vampire* (1893-95)

Annexe : Construction du corps des nombres complexes (Hors programme)

Faute d'outils plus rigoureux [3] on vous a présenté l'ensemble des nombres réels comme étant les abscisses des points d'une droite graduée. Additionner et multiplier des réels, c'est donc comme « compter en dimension 1 ».
Vous utilisez depuis l'école primaire ces nombres et leurs opérations usuelles associées, addition et multiplication sans trop vous poser de questions. Mais elles vérifient les propriétés particulières suivantes : [4] :
Pour tous réels x, y et z :

- ⇝ L'addition est associative : $x+y+z=(x+y)+z=x+(y+z)$ et commutative $x+y=y+x$
- ⇝ L'addition possède un élément neutre noté 0 : $x+0=0+x=x$
- ⇝ La somme de deux réels est encore un réel.
- ⇝ Chaque élément x admet un opposé noté $-x$ vérifiant $x+(-x)=(-x)+x=0$
- ⇝ La multiplication est associative
- ⇝ La multiplication possède un élément neutre noté 1 : $x\times 1=1\times x=x$
- ⇝ Le produit de deux réels est encore un réel.
- ⇝ Chaque réel $x\neq 0$ admet un inverse noté x^{-1} vérifiant $x\times x^{-1}=x^{-1}\times x=1$
- ⇝ La multiplication est distributive sur l'addition $x(y+z)=x\times y+x\times z$

Tout ceci est bien naturel et bien pratique pour compter. Maintenant, on voudrait faire le même travail en dimension 2 i.e pouvoir calculer avec des couples de nombres du style $(x;y)$.

On note l'ensemble de ces couples $\mathbb{R}^2$, et on souhaite définir des opérations de manière à faire de $\mathbb{R}^2$ un corps. On définit alors l'addition comme suit :

$$(x;y)+(x';y')=(x+x';y+y')$$

On vérifie aisément que cette opération est associative, commutative, admet un élément neutre $(0;0)$, la somme de deux éléments de $\mathbb{R}^2$ est encore un élément de $\mathbb{R}^2$ et tout élément $(x;y)$ admet un opposé $(-x;-y)$.

Définissons maintenant la multiplication ! On a envie de la définir de la manière suivante :

$$(x,y)\times(x';y')=(xx';yy') \qquad \text{avec } (1;1) \text{ comme élément neutre}$$

<u>Problème :</u> L'inverse de $(x;y)$ est $\left(\dfrac{1}{x};\dfrac{1}{y}\right)$ ce qui veut dire tous les couples du type $(x;0)$ avec $x\neq 0$ n'admettent pas d'inverse. Or on voudrait que seul le couple $(0;0)$ n'admettent pas d'inverse. Il faut donc changer de définition…

On décide d'adopter la définition suivante, moins naturelle :

$$(x;y)\times(x';y')=(xx'-yy';xy'+x'y)$$

On vérifie aisément que cette opération est associative, admet un élément neutre $(1;0)$, le produit de deux éléments de $\mathbb{R}^2$ est encore un élément de $\mathbb{R}^2$ et tout élément $(x;y)\neq(0;0)$ admet un inverse. Nous voici donc avec un nouveau corps.

Il est temps d'établir le lien entre $\sqrt{-1}$ et $\mathbb{R}^2$ tel qu'on l'a construit. On remarque que :

$$(0;1)^2=(0;1)\times(0;1)=(0-1;0+0)=(-1;0)$$

3. Vous les verrez peut-être un jour…En général on définit un nombre réel comme étant la limite d'une suite d'approximations par des rationnels.

4. Lorsque un ensemble possède ces propriétés et quelques autres, on dit que c'est un corps. Certains de vos parents ont étudié la notion de corps en classe de $4^{ème}$, cette étude se fait désormais après le lycée… $\mathbb{Q}$ est aussi un corps mais ce n'est pas le cas de $\mathbb{Z}$ ni de $\mathbb{N}$ (pas d'inverse pour la multiplication)

$(0,1)$ est alors le nombre que l'on a noté i, et $(-1;0)$ c'est -1, et on a alors $i^2 = -1$.

Pour mieux comprendre, imaginons l'ensemble des réels comme une droite graduée (ici représenté par l'axe des absisses), ajoutons-y un axe des ordonnées pour passer en dimension 2, alors le réel -1 est associé au point de coordonnées $(-1;0)$, et le nombre dont la racine carré est -1 est lui associé au point de coordonnée $(1;0)$. Nous notons $i = \sqrt{-1}$ pour qu'il fasse moins peur. On remarque qu'en particulier, tous les nombres réels sont des nombres complexes : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Ainsi nous avons les correspondances

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Le point M} & \longleftrightarrow & \text{Le couple } (x,y) & \longleftrightarrow & \text{Le nombre complexe } x+iy \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\text{Le plan } \mathscr{P} & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longleftrightarrow & \text{L'ensemble des nombres complexes}
\end{array}$$

L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$. La multiplication n'était pas naturelle dans $\mathbb{R}^2$, mais observez comme les calculs deviennent faciles dans $\mathbb{C}$ (pourtant équivalent) avec la règle $i^2 = -1$ et en prolongeant les règles de de calcul $\mathbb{R}$.

$$(x+iy)+(x'+iy') = x+iy+x'+iy' = (x+x')+i(y+y')$$

comme nous avions $(x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')$.
Et $(x+iy)\cdot(x'+iy') = xx'+ixy'+iyx'+i^2yy'$ mais n'oubliez pas que $i^2 = -1$. Alors

$$(x+iy)\cdot(x'+iy') = (xx'-yy')+i(xy'+yx')$$

comme nous avions $(x,y)\times(x',y') = (xx'-yy',xy'+yx')$, mais en plus simple.

Dans ce chapitre, nous avons découvert ces nouveaux nombres et associer à chacun de ces nombres un point du plan, donc associer des transformations du plan à des calculs dans $\mathbb{C}$. Tout ceci nous permet de résoudre des problèmes de géométrie par le calcul, ce que nous approfondiront dans un deuxième chapitre...