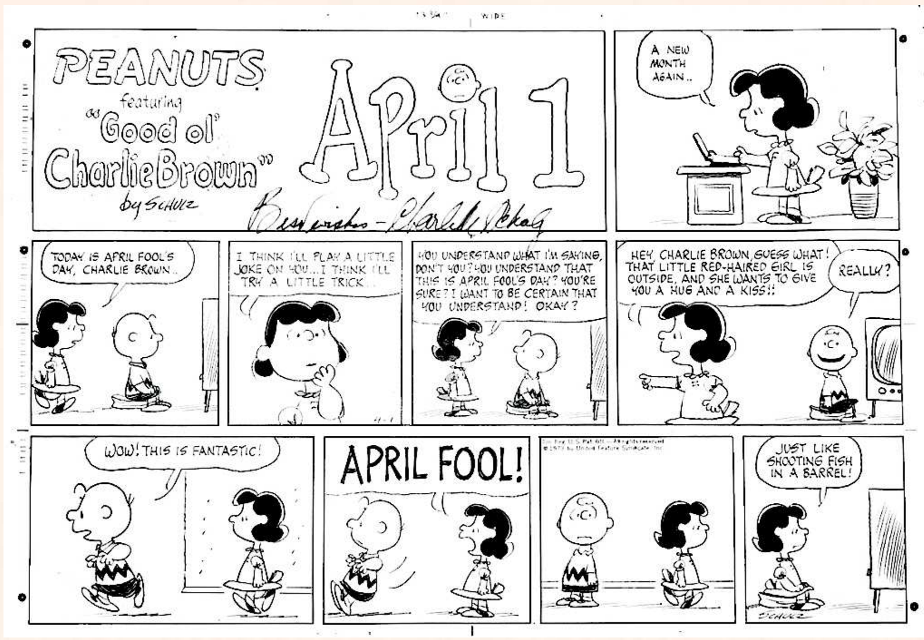
Chapitre 7

Une croissance exponentielle de vos connaissances



Hors Sujet

Titre : « Peanuts »

Auteur : Charles Schulz

Présentation succinte de l'auteur : Peanuts est le nom d'un comic strip écrit et dessiné quotidiennement, sans interruption et sans assistance par l'Américain Charles M. Schulz (1922 - 2000) d'octobre 19501 jusqu'à sa mort, en février 2000. Il aura écrit au total 17 897 strips dont 2 506 éditions du dimanche.

Peanuts est une série de gags qui tournent autour de deux personnages centraux, un garçon maladroit, malchanceux et déprimé, Charlie Brown et son chien, Snoopy. Le strip s'appuie sur le principe du running gag où les mêmes situations entre les personnages reviennent tout au long de la bande dessinée. De plus, chacun des personnages a ses particularités, ses obsessions et ses accessoires propres, qui ressurgissent chaque fois qu'ils apparaissent.

Le comic a été, à partir des années 1960 un succès planétaire. La popularité du strip et le nombre colossal de licences pour des publicités ou produits dérivés ont fait de Charles M. Schulz une des célébrités les plus riches du monde. À la mort de Schulz, le comic était publié dans plus de 2 600 journaux, dans 75 pays différents et dans 21 langues.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

⇝ Découvrir une nouvelle fonction de référence
⇝ Connaître ses propriétés

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

UNE CROISSANCE EXPONENTIELLE DE VOS CONNAISSANCES

Résumé

De nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques ou autres sont modélisés par une fonction f qui est proportionnelle à sa dérivée f'. (Par exemple, le phénomène de désintégration de noyaux radioactifs)
Nous allons ici nous intéresser à l'une des fonctions de ce type.
Plus particulièrement, que peut-on dire d'une fonction qui serait égale à sa dérivée ?
Nous connaissons déjà au moins une fonction égale à sa dérivée : la fonction nulle ! Mais cette fonction est sans intérêt. Notre objectif est d'en rechercher d'autres.

I) Enquête sur les fonctions

I.1. Un problème de radioactivité

Travail de l'élève **1.** Le Radon est un gaz radioactif qui se désintègre avec le temps. On a pu observé qu'une quantité quelconque de tels noyaux diminue chaque jour d'environ 16.5%.
On aimerait connaître le temps de demi-vie du Radon, ie le temps nécessaire pour que la moitié des atomes d'une quantité donnée de radon se soit désintégrée de façon naturelle.

Partie A : Modélisation par une suite

Soit R_n la quantité de radon au bout de n jours, avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la nature de la suite (R_n).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer R_n en fonction de n et de R_0.
   En déduire la proportion p_n de noyaux restants au bout de n jours, pour tout $n \geq 0$.
3. Déterminer à l'aide d'un tableau de valeurs le temps de demi-vie en jours du Radon.
4. Quelle critique pouvez-vous faire quant cette modélisation de la situation par une suite ?

Partie B : Modélisation par une fonction

Soit $R(x)$ est la quantité de noyaux de Radon restant au bout de x jours, et $p(x)$ la proportion de noyaux restant

au bout de x jours, avec x un réel positif dans les deux cas.
Il paraît alors assez naturel de faire l'hypothèse que, pour toute quantité initiale $\mathrm{R}(0)$ de Radon, la quantité $\mathrm{R}(x)$ de Radon restant au bout de x jours, avec $x \in \mathbb{R}^+$, est $\mathrm{R}(x) = p(x) \times \mathrm{R}(0)$, où $p(x)$ est un réel ne dépendant que de x.
On cherche alors à déterminer la forme d'une telle fonction p, si tant est qu'elle existe, pour répondre à la question donnée.
Supposons déjà qu'une telle fonction p existe.

1. **Relation fonctionnelle**

   a. Justifier que pour tous réels x et y positifs on a

   $$\mathrm{R}(x+y) = p(x+y) \times \mathrm{R}(0) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}(x+y) = p(y) \times \mathrm{R}(x)$$

   b. En déduire que pour tous réels x et y positifs on a

   $$p(x+y) = p(x) \times p(y) \qquad (*)$$

   $(*)$ s'appelle une relation fonctionnelle.
   On dit que p transforme les sommes en produits.

   c. Connaissez-vous une telle fonction ? Peut-elle être celle que l'on cherche ?

2. **Vérification de la cohérence avec la partie A.**

   a. En remplaçant y par 0 dans la relation $(*)$, vérifier que la valeur de $p(0)$ est cohérente avec $(*)$.

   b. Vérifier que $(*)$ est cohérente avec ce que l'on a déjà trouvé sur les entiers, ie que $p(n+m) = p(n)p(m)$ pour tous n et m entiers naturels.

Vous remarquerez que l'on ne peut pas encore répondre à notre problème, qui semble plus compliqué que prévu. Aussi allons-nous étudier en détails les éventuelles fonctions f vérifiant la relation $(*)$

I.2. Etude de l'équation fonctionnelle : vers les primitives

Travail de l'élève **2.** On admet qu'il existe des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et non nulles sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation suivante :

$$\text{Pour tous } x, y \in \mathbb{R} \quad \text{on a} \quad f(x+y) = f(x)f(y) \qquad (*)$$

1. **Conséquences directes**

   a. Démontrer que s'il existe un réel a tel que $f(a) = 0$ alors pour tout réel x, on a $f(x) = 0$.
   En déduire que ces fonctions ne s'annulent jamais.

   b. Soit x un réel quelconque. En remplaçant y par une valeur bien choisie dans $(*)$ démontrer que :

   $$f(0) = 1 \qquad\qquad f(x) \geq 0 \qquad\qquad f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

2. **Equation différentielle**
   Supposons de plus que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Soit x un réel quelconque. On pose $g : y \mapsto f(x+y)$ définie sur $\mathbb{R}$.

   a. En dérivant la fonction g par rapport à sa variable y, montrer que $f'(x+y) = f(x) \times f'(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

   b. En déduire que $f'(x) = k \times f(x)$ où k est un réel non nul.

Ceci est vrai pour tout $x \geq 0$, donc la fonction f, si elle existe, est proportionnelle à sa dérivée. Elle vérifie l'équation différentielle $f' = kf$.

Nous sommes désormais ramener à étudier les éventuelles fonctions f proportionnelles à leur dérivée.

Définition 1.

Une **équation différentielle** est une équation :
- où l'inconnue est une fonction, que l'on note habituellement y
- dans laquelle apparaît certaines dérivées de y, comme par exemple l'équation suivante :

$$y''(x) = 3y'(x) + 2y(x)$$

que l'on s'autorise à noter $y'' = 3y' + 2y$.
On appelle solution d'une équation différentielle (E) tout couple (f, I) où f est une fonction qui vérifie (E) sur I. On dira que f est solution de (E) sur I.
Résoudre une équation différentielle sur I c'est trouver toutes les fonctions solutions de (E) sur I.

Exemples :
- L'équation $y' = y$ est une équation différentielle, dont nous ne connnaissons pas encore de solution, mais nous allons nous ateler à la découvrir dans ce chapitre.
- L'équation $y' = x$ est une équation différentielle, dont nous savons que $y = \dfrac{x^2}{2}$ est une solution étant entendu que, dans une équation différentielle l'inconnue est une fonction. y désigne donc une fonction.

Remarques :
- Lorsqu'on ne précise pas l'intervalle I, il s'agit de l'intervalle $\mathbb{R}$.
- Rechercher les primitives d'une fonctions continue f sur un intervalle I, c'est résoudre sur I l'équation différentielle :

$$y' = f(x)$$

Ce sont les seules que nous étudierons cette année.

Exercice 1 : Trouver les fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $y' = \sin x$

2. $y' = 0$

3. $y'' = 0$

4. $y'' = x$

5. $y' = 5x(x^2+3)^4$

6. $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

I.3. Etude de l'équation différentielle $f' = f$: nécessité d'une condition initiale

Travail de l'élève **3.** Supposons qu'il existe une fonction f, non nulle, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \text{ sur } \mathbb{R}$$

1. **a.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g = \lambda f$.
Démontrer que $g' = g$ sur $\mathbb{R}$

b. Soit g une fonction vérifiant aussi $g' = g$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $f + g$ vérifie la même condition.

c. Conclure.

2. Supposons maintenant qu'il existe une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

a. On considère la fonction c définie sur $\mathbb{R}$ par $c(x) = f(x)f(-x)$.
Montrer que c est une fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
A ce stade, vous avez peut-être l'impression de tourner en rond. En réalité, vous avez démontré des réciproques de ce l'activité 2.

c. Soit g une fonction qui vérifie $(*)$.
En considérant la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h = \dfrac{g}{f}$, montrer $g = f$.

d. Conclure.

Dans cette partie on vient de démontrer que s'il existe une solution alors il en existe une infinité, puis en imposant une condition initiale (ici $f(0) = 1$, ce qui est logique si l'on veut avoir la relation fonctionnelle) on a démontré que s'il existe une solution à notre équation alors elle est unique.

I.4. Approche graphique par la méthode d'Euler

Travail de l'élève **4.** On cherche à construire de façon approchée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une éventuelle fonction dérivable f qui vérifie les conditions

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

Comme on ne connait pas f, on ne peut pas déterminer l'ordonnée du point M de la courbe ayant pour abscisse x.
On utilisera donc la méthode d'Euler pour approximer sa position. Elle consiste à dire qu'une courbe est proche d'une de ses tangentes à proximité du point de tangence.

1. Construire un repère orthonormé d'unité graphique 10 cm.

2. Quel est le seul point que l'on connait situé sur $\mathscr{C}_f$?
On prendra donc ce point comme référence dans toutes les questions suivantes.

3. Avec un pas de 1

a. Quel est le coefficient directeur de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?

b. Tracer le segment porté par cette tangente pour x variant de 0 à 1.

c. Si on assimile $\mathscr{C}_f$ à T_0, quelle approximation de $f(1)$ obtient-on ?

4. Avec un pas de 0.5

a. Avec le tracé précédent, quelle approximation de $f(0.5)$ obtient-on ?

b. Quel approximation du coefficient directeur de la tangente $T_{0.5}$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.5 peut-on en déduire ?

c. Quelle nouvelle approximation de $f(1)$ obtient-on ?

5. Avec un pas de 0.25

a. Avec le tracé de la question **1.**, quelle approximation de $f(0.25)$ obtient-on ?

b. Quel approximation du coefficient directeur de la tangente $\mathrm{T}_{0.25}$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.25 peut-on en déduire ?

c. En adaptant la méthode précédente, continuer vos calculs (sans arrondir !) et votre construction pour en déduire une nouvelle approximation de $f(1)$.

6. Avec un pas de $h > 0$

a. En utilisant la méthode d'Euler, démontrer que

$$f(h) \simeq 1+h \qquad f(2h) \simeq (1+h)^2 \qquad f(3h) \simeq (1+h)^3$$

b. Démontrer finalement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$f(nh) \simeq (1+h)^n$$

c. On pose $x = nh$. Démontrer que pour n assez grand :

$$f(x) \simeq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

C'est la suite $(u_n(x))$ *définie par* $u_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ *qui sert à démontrer rigoureusement l'existence de la fonction* f.

d. A l'aide de la calculatrice, tracer les courbes des approximations de la fonction f pour des valeurs de n égales à 10, 100 et 1000.

e. En prenant $n = 1000$, donner une valeur approchée du nombre $f(1) \simeq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *Le nombre* $f(1)$ *est encore noté* e. *En fait on a :*

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Conclusion :

Cette fonction f vérifiant les conditions $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$ est unique et est appelée **fontion exponentielle**.

On la note exp.

On vient de voir à quoi ressemble sa représentation graphique. nous verrons, dans le cours, que cette fonction possède des propriétés remarquables, notamment évidemment, celle de transformer des « sommes » en « produits », i.e :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \forall y \in \mathbb{R} \quad : \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

II) La fonction exponentielle

II.1. Définition et premières propriétés

Théorème 1. (Définition)

Le problème différentiel : $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ appelée **fonction exponentielle** et noté exp.
Ainsi

$$\exp(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \text{on a } \exp'(x) = \exp(x)$$

Remarque : Autrement dit il n'existe qu'une et une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée qui vaut 1 en 0

Preuve
L'existance est délicate et admise.
L'unicité a été démontrée en activité.

Propriété 1.

1. Pour tout réel x on a $\exp(-x) \times \exp(x) = 1 \Longleftrightarrow \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
2. Pour tout réel x on a $\exp(x) \neq 0$
3. Pour tout réel x on a : $\exp(x) > 0$
4. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Preuve

1. et 2. On a démontré dans l'activité 2 que si f était solution du problème différentiel alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x)f(-x) = 1$$

et par conséquent, comme exp est l'unique solution de ce problème, on a pour tout réel x :

$$\exp(x) \times \exp(-x) = 1 \qquad \text{et } \exp(x) \neq 0$$

3. et 4. On sait déjà que $\exp(0) = 1 > 0$.
Supposons qu'il existe un réel x_1 tel que $\exp(x_1) < 0$.
Comme la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle y est aussi continue et d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe une solution à l'équation $\exp(x) = 0$, ce qui est absurde.
Par conséquent $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On a donc pour tout réel x :

$$\exp'(x) = \exp(x) > 0$$

La fonction exp est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2.

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors

$$(\exp(u))' = u' \times \exp(u)$$

Preuve

On sait que

$$(f \circ u)' = u' \times f'(u)$$

On applique ce résultat pour $f = \exp$.

Exemples :

Etudier les variations des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp(3x^2 + 1) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \exp(-2x + 1)$$

Pour tout réel x : $f'(x) = 6x\exp(3x^2 + 1)$.
Or $\exp(X) > 0$ pour tout X. Donc $f'(x)$ est positif si et seulement $6x > 0$ si et seulement si $x > 0$.
Finalement, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Pour tout x, $g'(x) = -2\exp(-2x + 1)$.
Donc $g'(x) < 0$ pour tout x et g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

II.2. Relation fonctionnelle et conséquences

Théorème 3.

Pour tous réels x et y :

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

La fonction exponentielle transforme les sommes en produits.

Preuve

Soit $a \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \exp(x + a)\exp(-x)$$

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \exp'(x + a)\exp(-x) - \exp(x + a)\exp'(-x) \\ &= \exp(x + a)\exp(-x) - \exp(x + a)\exp(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$.
De plus $g(0) = \exp(a)\exp(0) = \exp(a)$.

Preuve (Suite)

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(x+a)\exp(-x) = \exp(a) \Longleftrightarrow \exp(x+a) = \frac{\exp(a)}{\exp(-x)}$$

Or, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\exp(x) \times \exp(-x) = 1 \Longleftrightarrow \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$$

Par conséquent on peut conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\exp(x+a) = \exp(a) \times \exp(x)$$

Ce résultat étant vrai pour tout $a \in \mathbb{R}$, en choisissant $y = a$ on obtient le résultat voulu.

Remarque : Réciproquement, toute fonction transformant les sommes en produits est une fonction du type :

$$f(x) = \exp(ax) \qquad \text{où} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Mais nous admettrons ce résultat.

Propriété 2.

Pour tous réels x et y, on a $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

On en déduit $\exp(nx) = \left(\exp(x)\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ et $\exp\left(\dfrac{x}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(x)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Preuve

Pour tous réels x et y on a, d'après le théorème précédent :

1. $\exp(x-y) = \exp(x)\exp(-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

   Remarquons qu'en prenant $y = 0$ dans la relation précédente, on obtient retrouve le résultat :

$$\exp(-x) = \frac{\exp(0)}{\exp(x)} = \frac{1}{\exp(x)}$$

2. $1^{\text{ère}}$ méthode : Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{nx}}{(e^x)^n}$ est constante égale à 1.

   $2^{\text{ème}}$ méthode : Raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ afin de démontrer $\mathscr{P}(n)$: $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$

   ⇝ *Initialisation* : Pour $n = 0$ on a : $\exp(0 \times x) = \exp(0) = 1$ et $(\exp(x))^0 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.

   ⇝ *Hérédité* : Supposons que la propriété $\mathscr{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier n, montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$. On a :

$$\begin{aligned} \exp((n+1)x) &= \exp(nx+x) \\ &= \exp(nx)\exp(x) && \text{d'après la relation fonctionnelle} \\ &= \left(\exp(x)\right)^n \exp(x) && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \left(\exp(x)\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Preuve (Suite)

Ainsi la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$.
On vient de démonter que pour tout $n \in \mathbb{N}$:$\exp(nx) = \left(\exp(x)\right)^n$
Qu'en est-il si $n<0 \Longleftrightarrow -n>0$?
On sait que

$$\exp(-nx)\exp(nx) = 1$$

Donc :

$$\exp(nx) = \frac{1}{\exp(-nx)} = \frac{1}{\left(\exp(x)\right)^{-n}} = \left(\exp(x)\right)^n$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\exp(nx) = \left(\exp(x)\right)^n$$

3. Un petit rappel d'abord, la racine $n^{ième}$ d'un nombre réel positif est l'unique solution positive de l'équation $x^n = a$.
On a pour tout $n \geq 1$ $\quad \exp\left(\frac{a}{n}\right)^n = \exp\left(n \times \frac{a}{n}\right) = \exp(a)$, par conséquent :

$$\exp\left(\frac{a}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(a)}$$

II.3. Nouvelle notation

Notation

On note e le nombre $\exp(1)$:

$$e = \exp(1) \simeq 2,71828$$

Remarques :

⇝ On a vu dans l'activité 4 que :

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

⇝ Avec les propriétés de la fonction exponentielle, on a alors $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\exp(n) = \exp(n\times 1) = [\exp(1)]^n = e^n$$

Par exemple, $\quad \exp(3) = \exp(3\times 1) = \left(\exp(1)\right) = e^3$
De plus, comme l'exponentielle transforme les sommes en produits, on a, pour tous n et m dans $\mathbb{Z}$:

$$e^{n+m} = \exp(n+m) = \exp(n)\exp(m) = e^n e^m$$

D'où la notation suivante :

Notation

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note

$$e^x = \exp(x)$$

Remarque : Cette notation est légitime, elle ne fait que prolonger à tous les réels, une propriété constatée sur les entiers.

Résumons désormais, à l'aide de cette nouvelle notation, toutes les propriétés rencontrées sur la fonction exponentielle :

Résumé

Pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour toute fonction u dérivable sur I, on a

1. $e^0 = 1$
2. $e^1 = e$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $e^x e^{-x} = 1$
5. $e^x > 0$
6. $e^x e^y = e^{x+y}$
7. $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
8. $e^{nx} = \left(e^x\right)^n$
9. $\left(e^u\right)' = u' \times e^u$
10. $e^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{e^x}$, $n \geq 1$

Exemples :

Simplifier les écritures suivantes :

1. $e^{x+2}e^{-x+2}$
2. $\dfrac{e^{-2x+1}}{e^{-x+1}}$
3. $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
4. $\sqrt{\left(e^{-2x+6}\right)^3}$
5. $\sqrt{3e^{-x} + 6e^{-x}}$
6. $\sqrt{\dfrac{2e^{3x+1}}{e^{2x-1}}}$

Exercice 2 : Simplifiez au maximum les expressions suivantes :

1. $\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}$
2. $\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x+1}$
3. $\mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}$
4. $\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2$
5. $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2-x}}$
6. $\dfrac{(\mathrm{e}^x)^3}{\mathrm{e}^{2x}}$
7. $\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$
8. $\left(\mathrm{e}^x\right)^5\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)^2$
9. $\mathrm{e}^{-3x+1}\left(\mathrm{e}^x\right)^3$
10. $\sqrt{\mathrm{e}^{-2x}}$
11. $\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)^2$ –
$\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-x}\right)$

Exercice(s) du livre : n° 28-31-32-33 p 134 + 21-22 p 133 + 26-27 p 133 + 69 p 142 + ROC : 29 p 133

III) Etude de la fonction exponentielle

III.1. Variations

Théorème 4. (Rappels)

1. La fonction exponentielle est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Pour tous nombres réels x, y on a donc :

$$x < y \iff e^x < e^y \quad ; \quad x > y \iff e^x > e^y \quad \text{et} \quad x = y \iff e^x = e^y$$

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $e^{-x} + 1 = 0$
2. $e^{3x-1} - e^{-x} < 0$
3. $-2 \leq e^x \leq 1$
4. $e^{2x} + e^x < 2$

III.2. Tangente, Limites et Asymptote

Travail de l'élève **5.**

1. **a.** Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.

   b. En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$, montrer que $\mathscr{C}$ est toujours au-dessus de T.

   c. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

   d. Grâce à un changement de variable, en déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

2. **a.** En utilisant ce qui précède, comparer $e^{\frac{x}{2}}$ et $\dfrac{x}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

Théorème 5.

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

Preuve

Cf Activité ou :

Montrons pour cela que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$e^x \geq x$$

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - x$$

g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - 1$
$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow e^x = 1 \Longleftrightarrow e^x = e^0 \Longleftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Par conséquent $g(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ i.e :

$$e^x - x \geq 1 > 0 \Longrightarrow e^x > x$$

Grâce au théorème de comparaison on a :

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Preuve (Suite)

De plus, en posant $X = -x$, on a que si $x \longrightarrow +\infty$, $X \longrightarrow -\infty$ et dans ce cas :

$$\lim_{X \to -\infty} e^X = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

De plus, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x$, par conséquent $e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{x}{2}$.

La fonction carré étant croissante sur les positifs, on a donc aussi $e^x \geq \frac{x^2}{4} \iff \frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{4}$.

D'après le théorème de comparaison, on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

On effectue ensuite un changement de variable dans l'expression xe^x pour x qui tend vers $-\infty$.

On pose $X = -x$ alors on a $xe^x = -Xe^{-X} = \frac{-X}{e^X}$ avec X qui tend vers $+\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{-X}{e^X} = -\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0$ d'après ce qui précède.

Remarque : La représentation graphique de la fonction exponentielle admet

- en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
- pour tangente en 0 la droite d'équation $y = x + 1$, et est toujours au-dessus d'elle.

Exemples :

Déterminer les limites en $\pm\infty$ des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = e^{3-x}$
2. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
3. $f(x) = e^x - x$

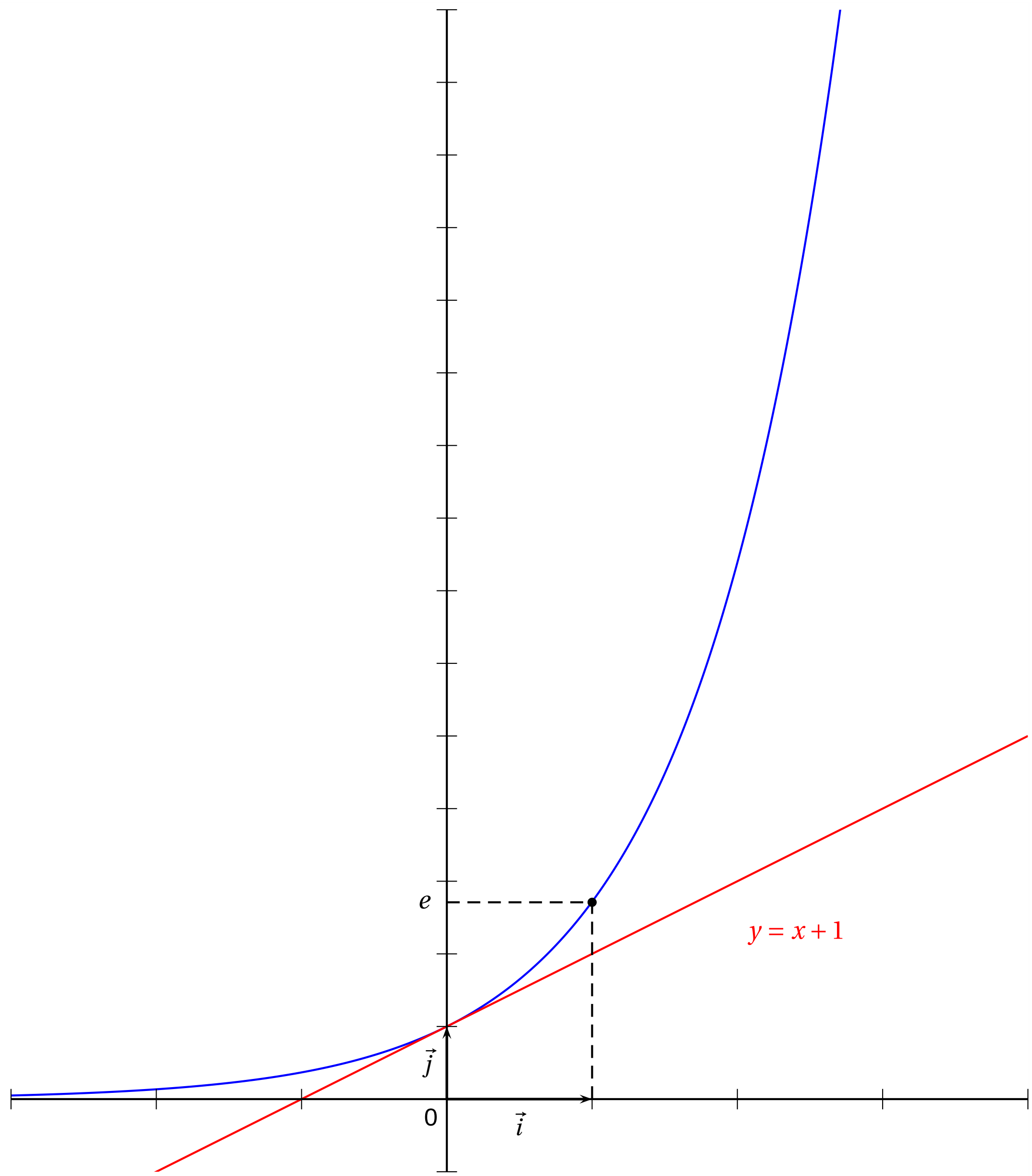
Exercice(s) du livre : n° 41-46 p 137

III.3. Représentation graphique

On peut désormais établir le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de e^x				$+$			
Variation de e^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

On dispose également de suffisament d'informations pour représenter graphiquement la fonction exponentielle. On commence par tracer l'asymptote $y = 0$ en $-\infty$ et la tangente $y = x + 1$ au point d'abscisse 0.



III.4. Fonction réciproque

Corollaire 1. (Définition)

Si $a \in \mathbb{R}^{+*}$ l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on appelle **logarithme népérien de** a et que l'on note $\ln(a)$.

Preuve

On applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires à la fonction exponentielle, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ dès que $a > 0$.

Remarque : On a donc, pour tout $a > 0$, pour tout $b \in \mathbb{R}$:

$$e^{\ln(a)} = a \qquad \text{et} \qquad \ln(e^b) = b$$

En effet pour la première égalité, comme $\ln(a)$ est solution de $e^x = a$ on obtient littéralement $e^{\ln(a)} = \lambda$
De plus le nombre $\ln(e^b)$ est solution de l'équation $e^x = e^b \iff x = b$, par conséquent $\ln\left(e^b\right) = b$

Exemples :

Résoudre $e^x = 5$, $e^{-x} = -5$, $e^{-2x+3} = 4$et $e^{3x} > \pi$

Exemple :

Répondre (enfin !) au problème posé dans l'activité 1.

III.5. Autres limites à connaître

Travail de l'élève **6.** n° 47 p 137

Théorème 6.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$
En particulier on retrouve :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$
2. Taux d'accroissement à l'origine :
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Preuve

Cf Activité 6 ou on généralise les méthodes de l'activité 5.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ (donc n fixé). Montrons tout d'abord que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

   On sait que pour tout $X \in \mathbb{R}$ on a : $e^X \geq X$

   En particulier pour $X = \dfrac{x}{n+1}$, avec $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $e^{\frac{x}{n+1}} \geq \dfrac{x}{n+1}$

   La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{n+1}$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc :

   $$e^{\frac{x}{n+1}} \geq \frac{x}{n+1} \Longrightarrow f\left(e^{\frac{x}{n+1}}\right) \geq f\left(\frac{x}{n+1}\right) \Longrightarrow e^x \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$$

   Ainsi on obtient :

   $$\frac{e^x}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)^{n+1}}$$

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{(n+1)^{n+1}} = +\infty$, on en déduit par comparaison que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

   En posant $X = -x$ on obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty} |x^n e^x| = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X^n}{e^X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^X}{X^n}} = 0$ d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

   En particulier pour $n = 1$ on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

2. Pour la troisième limite, nous reconnaissons le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0, sa limite est donc égale au nombre dérivé en 0 de l'exponentielle à savoir :

   $$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \exp'(0) = e^0 = 1$$

Exemples :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \times \sqrt{x} = +\infty \qquad \text{car } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Remarque : Quand on a une **forme indéterminée en l'infini** impliquant une exponentielle et un polynôme, on retiendra que c'est toujours l'exponentielle qui « l'emporte ».

Exercice 3 : En utilisant le résultat suivant :

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Déterminer les limites suivantes :

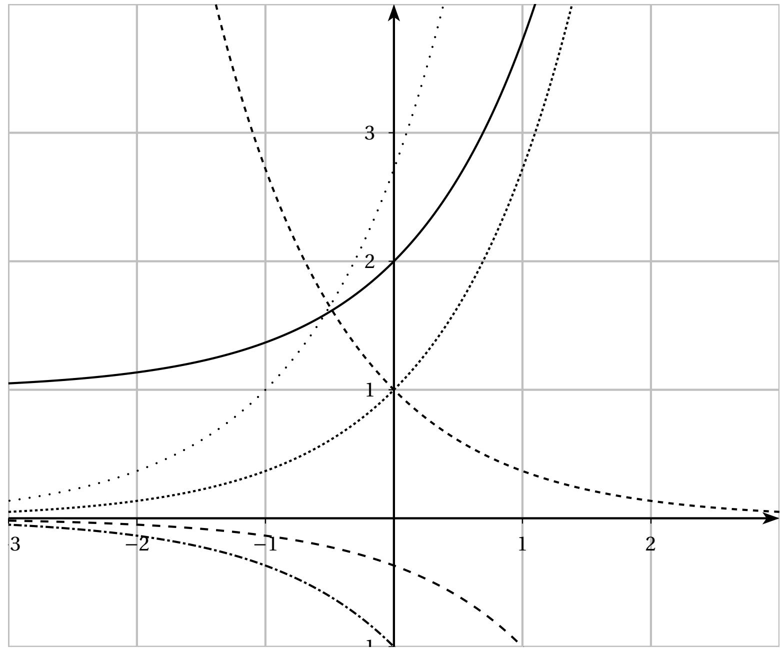
$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x^2}} - 1\right)$$

Exercice 4 : Calculer les dérivées et les limites aux bornes des ensembles de définitions des fonctions définies par les expressions suivantes :

1. $f_1(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + 1$
2. $f_2(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$
3. $f_3(x) = \dfrac{3x + 1 - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$
4. $f_4(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$
5. $f_5(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)}$
6. $f_6(x) = \mathrm{e}^{5x^3+7x+4}$

Exercice 5 : Reconnaître parmi les figures ci-contre les courbes représentatives des fonctions suivantes :

- $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$
- $x \mapsto \mathrm{e}^{x}$
- $x \mapsto \mathrm{e}^{x+1}$
- $x \mapsto \mathrm{e}^{x}+1$
- $x \mapsto -\mathrm{e}^{x}$
- $x \mapsto -\mathrm{e}^{x-1}$



Exercice 6 : Le plan est rapporté à un repère orthonormal.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-2,1\mathrm{e}^{x}+1,1x+1,6$$

1. Faites apparaître sur l'écran de votre calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-5\leqslant x\leqslant 4,\ -4\leqslant y\leqslant 4$.

Reproduire l'allure de la courbe obtenue sur votre copie.

2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :

- **a.** Sur les variations de la fonction f ?
- **b.** Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$?

3. On se propose maintenant d'étudier la fonction f.

- **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{e}^{2x}-2,1\mathrm{e}^{x}+1,1\geqslant 0$ (on pourra poser $\mathrm{X}=\mathrm{e}^{x}$).
- **b.** Étudier les variations de la fonction f.
- **c.** Déduire de cette étude le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.

4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-0,05\ ;\ 0,15]$, de façon à visualiser les résultats de la question **3.**

Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée y peut-on choisir pour la fenêtre de la calculatrice ?

Exercice(s) du livre : n° 48-51-61 p 137 (limites)
n° 43 à 45 p 136 + 59-66-71-74 p 139 et après (limites et suites) + 40 p 136 (TVI + algo) + 56 p 138 (avec de la trigo)
n° 60-64 p 141 (étude de fonctions)

IV) Type bac et plus

Exercice 7 : Six affirmations, réparties en deux thèmes et numérotées de 1. a à 2. c sont proposées ci-dessous. Le candidat portera sur sa copie, en regard du numéro de l'affirmation, et avec le plus grand soin, la mention VRAI ou FAUX.

Chaque réponse convenable rapporte 0,4 point. Chaque réponse erronée enlève 0,1 point. Il n'est pas tenu compte de l'absence de réponse. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Pour tout réel x, e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle.

Affirmation 1. a	Pour tous les réels a et b : $\left(\mathrm{e}^a\right)^b = \mathrm{e}^{\left(a^b\right)}$.
Affirmation 1. b	Pour tous les réels a et b : $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$.
Affirmation 1. c	La droite d'équation $y = x+1$ est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en son point d'abscisse 1.

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.

Affirmation 2. a	Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Affirmation 2. b	Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.
Affirmation 2. c	Si f est dérivable en a, alors la fonction $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

Exercice 8 :

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}$.
4. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.

2. Démontrer qu'une tangente à $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0.$$

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2\mathrm{e}^{x-1} = 0.$$

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

Exercice 9 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(2x^3 - 4x^2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

- **a.** Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- **b.** Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 2x\left(-x^2 + 5x - 4\right)\mathrm{e}^{-x}$.
- **c.** Dresser le tableau de variations de f.
- **d.** Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$(unité graphique : 1 cm).

2. Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On définit la fonction v sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $v(x) = u\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

- **a.** On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ (où $0 < a < b$).
  Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\dfrac{1}{b}\ ;\ \dfrac{1}{a}\right]$.
- **b.** On définit maintenant la fonction g par $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$, où f est la fonction définie dans la question 1.
  Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$,
- **c.** Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 10 : Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

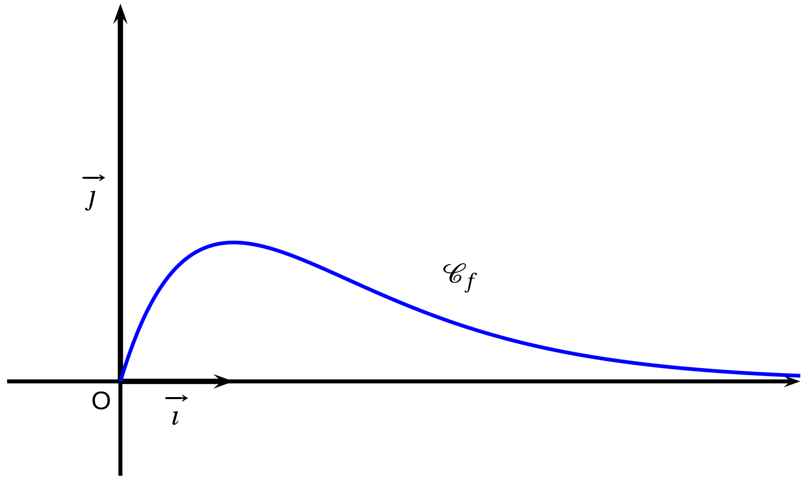
La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ est donnée en annexe (à rendre avec la copie).

1. D'après le graphique, quelles semblent être les variations de la fonction f et sa limite en $+\infty$?

2. Valider ces conjectures à l'aide d'une démonstration.

3. Tracer sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie) la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g.

4. Quelle semble être la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$?
Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.



Exercice 11 : **A - Restitution organisée de connaissances**

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$. Démontrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.

B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$. On note $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. On prendra 4 cm pour unité graphique.

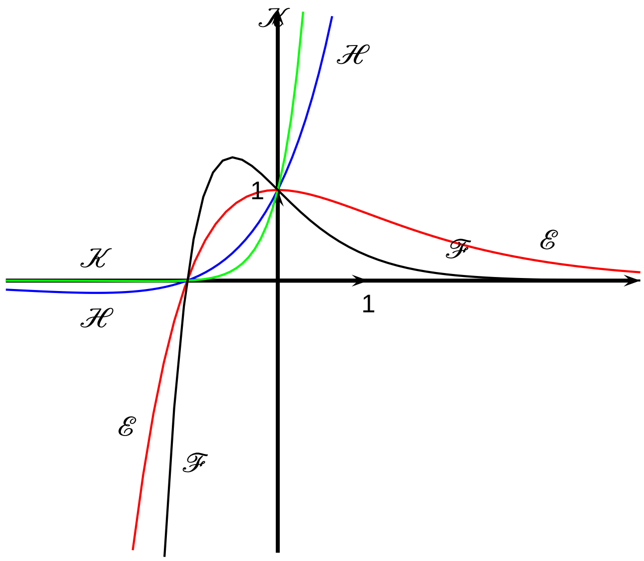
1. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

   Étudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variations le plus complet possible.

2. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

C - Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{kx}$. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan. On remarque que le cas $k=-1$ a été traité dans la partie B, car on a $f_{-1} = f$ et $\mathscr{C}_{-1} = \mathscr{C}$.



1. **a.** Quelle est la nature de la fonction f_0 ?

b. Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_k$.

2. Étudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de l'expression : $(x+1)\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$.

En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.

3. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.

En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k. (On distinguera les cas : $k>0$ et $k<0$.)

4 Le graphique suivant représente quatre courbes $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}$, et $\mathscr{K}$, correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k, parmi les entiers $-1,\ -3,\ 1$ et 2.

Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.

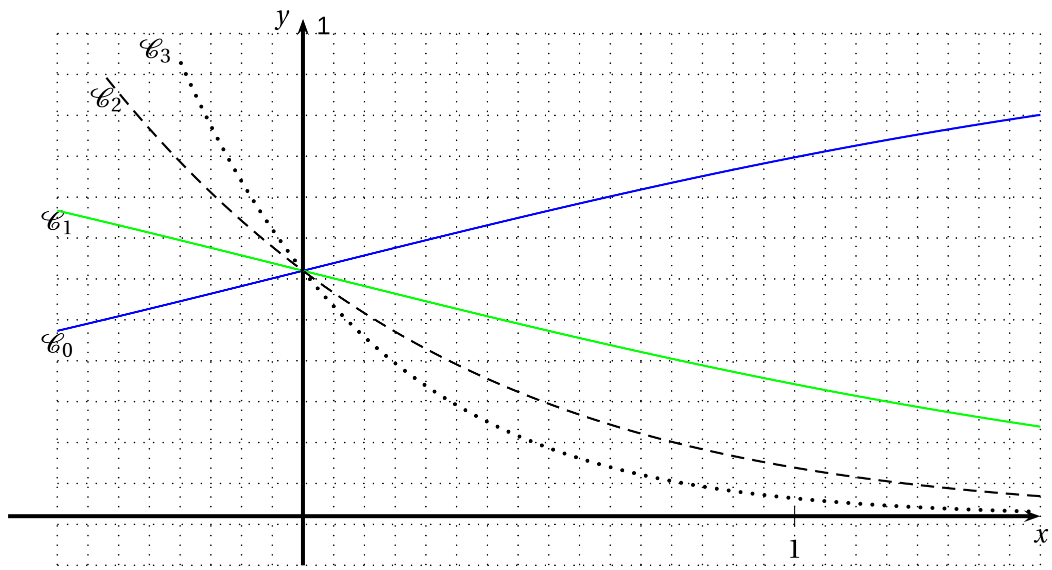
Exercice 12 : Soit n un entier naturel.

On note f_n, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous :



1. Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. On préciser ses coordonnées.
2. Étude de la fonction f_0
   - **a.** Étudier le sens de variation de f_0.
   - **b.** Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.
   - **c.** Dresser le tableau de variation de fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.
3. Étude de la fonction f_1
   - **a.** Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x.
   - **b.** En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.
   - **c.** Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.
4. Étude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$
   - **a.** Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{(n-1)x}}.$$

   - **b.** Étudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
   - **c.** Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 :

1. **Restitution organisée de connaissances.**

   L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

   On supposera connus les résultats suivants :
   - la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;
   - $\mathrm{e}^0 = 1$;
   - pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x > x$.

- Soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[\mathrm{A}\,;\,+\infty[$ où A est un réel positif.
  Si pour tout x de $[\mathrm{A}\,;\,+\infty[$, $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

a. On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.
Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.

b. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

2. On appelle f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

a. Montrer que f est positive sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour $\mathscr{C}$.

c. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. On considère la fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $\mathrm{F}(x) == 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

a. Montrer que F est une fonction strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. Calculer la limite de F en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de F sur $[0\,;\,+\infty[$.

c. Justifier l'existence d'un unique réel positif α tel que $\mathrm{F}(\alpha) = 0,5$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

Exercice 14 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^{-2x}$ et sa courbe représentative (C) dans le repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A - Étude de la fonction f

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour (C) ?

b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.

3. Dresser le tableau de variation de f.

4. **a.** Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

b. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B - Étude d'une tangente

1. On rappelle que f'' désigne la dérivée seconde de f.

a. Montrer que, pour tout réel x, $f''(x) = 4(2x-1)e^{-2x}$.

b. Résoudre l'équation $f''(x) = 0$.

2. Soit B le point d'abscisse 1/2 de la courbe (C). Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en B.

3. On veut étudier la position relative de (C) et (T) : pour cela on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = f(x) - \left(-\frac{2}{e}x + \frac{3}{e}\right)$$

a. Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$.

b. Étudier le signe de $g''(x)$ suivant les valeurs x. En déduire le sens de variation de g' sur $\mathbb{R}$.

c. Calculer $g'(1/2)$ et en déduire le signe de $g'(x)$ puis le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

d. Calculer $g(1/2)$ et déterminer alors le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. Que peut-on en conclure sur la position relative de (C) et (T) ?

(Bac 2001)

Exercice 15 : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Rappelez la définition d'une fonction continue en zéro.
2. Existe-t-il une valeur de a telle que f soit continue en zéro ?
3. Sachant que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, montrez que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$.
4. Rappelez la définition d'une fonction dérivable en zéro.
5. La fonction f est-elle dérivable en zéro ?
6. Calculez $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. La fonction f' est-elle continue en zéro ?
7. Déterminez une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $\begin{cases} f(x) = u(x)\exp(v(x)) & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = a & \text{si } x = 0 \end{cases}$ telle que f soit continue en zéro mais pas dérivable en zéro. Vous expliquerez au maximum les raisons qui vous ont conduit à chercher $u(x)$ et $v(x)$ sous une forme plutôt qu'une autre. toout raisonnement sera évalué même s'il n'aboutit pas à une solution explicite.

Exercice 16 : On appelle cosinus hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\cosh : x \mapsto \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

sinus hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\sinh : x \mapsto \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

et tangente hyperbolique la fonction définie par

$$\tanh : x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

1. Déterminez les dérivées de ces fonctions en fonction de cosh et sinh.
2. Étudiez ces fonctions pour montrer que cosh est à valeurs dans $[1, +\infty]$ et que tanh est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1, 1]$.
3. Calculez $\tanh(x)$ en fonction de e^x et e^{-x}, puis en fonction de e^{2x}, enfin en fonction de e^{-2x}.
4. Montrez que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
5. Montrez que $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y)$ et que $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y)+\cosh(x)\sinh(y)$.
6. Déduisez-en que $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh(x)+\tanh(y)}{1+\tanh(x)\tanh(y)}$

7. On pose $t = \tanh(x/2)$. Montrez que $\cosh(x) = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ puis que $\sinh(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$
8. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $5\cosh(x) - 4\sinh(x) = 3$. Vous donnerez une valeur approchée de la solution à 10^{-3} près.
9. Pour le plaisir : dérivez la fonction $x \mapsto \dfrac{2\sin(x)\sinh(x)}{(\sinh(x)+\sin(x))^2}$
10. Soit $y \in \mathbb{R}$. Comparez $\sinh(y)$ et y.
11. Montrez que $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$ puis étudiez la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par
$$f(x) = \frac{\tanh(x)}{x}$$
.

Exercice 17 : L'équation de la hauteur h par rapport au sol d'un fil électrique suspendu entre deux poteaux s'obtient en résolvant l'*équation différentielle*

$$h''(x) = k\sqrt{1+(h'(x))^2}$$

où k est un paramètre qui dépend de la densité et de la tension du fil et x est mesuré en mètres horizontalement à partir d'une origine située sur le sol en-dessous du point où la hauteur du fil est la plus faible.

1. Vérifiez que $h : x \mapsto \dfrac{1}{k}\cosh(kx)$ satisfait cette équation différentielle.
2. Quelle est la hauteur minimale du fil si le paramètre k vaut $0,05$?
3. Quelle est la hauteur des poteaux (de même hauteur) s'ils sont distants de 30 m et que le paramètre k vaut 0,05 ?