CHAPITRE 5

DANS LA CONTINUITÉ, ÉTUDIONS LES FONCTIONS !

HORS SUJET

TITRE : « Flower Chucker »
AUTEUR : BANKSY-POCHOIRISTE
PRÉSENTATION SUCCINTE DE L'AUTEUR : Il combine les techniques du graffiti et du pochoir pour faire passer ses messages, qui mêlent souvent politique, humour et poésie comme Ernest Pignon-Ernest ou Blek le rat. Les pochoirs de Banksy sont des images humoristiques, parfois combinés avec des slogans. Le message est généralement antimilitariste, anticapitaliste ou antisystème. Ses personnages sont souvent des rats, des singes, des policiers, des soldats, des enfants ou des personnes âgées.

Il s'est forgé une certaine notoriété dans les milieux alternatifs et les médias traditionnels s'intéressent aussi à lui. Il a notamment travaillé sur le film Les Fils de l'homme2 et a réalisé en 2003 la pochette du disque de Blur, Think Tank.

Banksy a fondé le projet « Santa's Ghetto » en réalisant des peintures sur le mur de Gaza afin de redonner espoir aux habitants palestiniens et israéliens. Aidé par d'autres artistes, comme Ron English, un Américain, le mur de séparation prend petit à petit les couleurs d'une toile artistique géante, comme avec l'image de la petite Vietnamienne brûlée au napalm qui tient par la main Mickey Mouse et Ronald McDonald.

Concernant ce projet, Banksy raconte dans son livre Wall and Piece, qu'un jour, alors qu'il peignait sur le mur de séparation, un habitant est venu lui dire : « vous embellissez le mur ». Banksy, flatté : « Merci, c'est gentil », fut aussitôt coupé par le vieil homme : « On ne veut pas que ce mur soit beau, on ne veut pas de ce mur, rentrez chez vous ».

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Montrer qu'une fonction est continue en un point
- ⇝ Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires
- ⇝ Connaître ses formules de dérivées
- ⇝ Etudier des fonctions trigonométriques

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

DANS LA CONTINUITÉ, ÉTUDIONS LES FONCTIONS !

Résumé

Les notions de continuité et de dérivabilité, et par suite d'intégration sont apparues tardivement dans l'histoire des mathématiques (XVII$^{\text{ème}}$ siècle) et ont permis de résoudre de nombreux problèmes auxquels les méthodes classiques n'offraient pas de solution générale, comme le calcul de la vitesse instantanée, la recherche de trajectoire d'un objet en mouvement, le calcul de la longueur de la trajectoire d'une planète, le calcul de l'aire limitée par des courbes, ...

Ce n'est qu'au siècle dernier que les mathématiciens ont travaillé avec rigueur en utilisant ces nouveaux objets. En effet ils se sont longtemps contentés d'utiliser des définitions intuitives...

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur $\mathbb{R}$ ou sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les intervalles considérées sont non vides et non réduit à un réel.

I) Continuité d'une fonction

I.1. Notion de continuité

Définition 1.

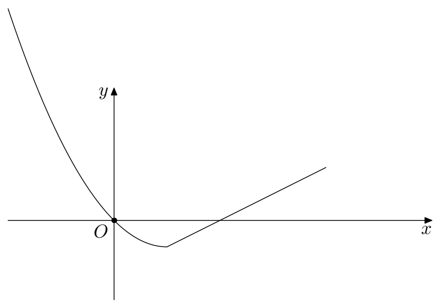
Soit I un intervalle contenant un réel a, et f une fonction définie au moins sur I (donc en a).
On dit que f est **continue en** a lorsque : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
En particulier, dans ce cas on a : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.
On dit que f est **continue sur** I lorsqu'elle est continue en tout réel a de I.

Exemple :
Vous savez que la fonction carré tend vers 9 lorsque x tend vers 3. Et bien cela signifie que la fonction carré est continue en 3 (en fait elle est même continue en tout réel, donc sur $\mathbb{R}$).

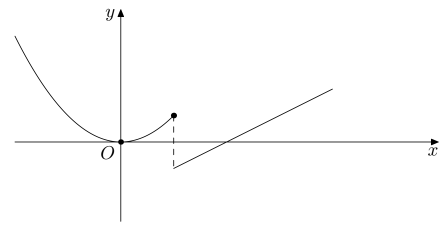
Remarques :

- La plupart des fonctions que vous connaissez sont continues sur leur ensemble de définition.
  Mais le démontrer est assez ardu, car la définition de la continuité, et donc de celle des limites, n'est pas d'un usage aisé.
- On ne voit pas trop ce que signifie cette définition. En fait, le mot *continue* est bien choisi, car les fonctions continues sur un intervalle sont celles dont la représentation graphique se trace à l'aide d'un trait continu (mais attention, ce ne sont pas les seules, il faut donc rester méfiant quant à ce raccourci graphique ...)
- On a cependant besoin de la définition de la continuité en un point, car il existe des cas où une fonction est clairement continue presque partout, et qu'il faut regarder juste en certains points, plus délicats.

Illustrations :



On peut tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ sans lever le crayon. Elle ne présente pas de « saut », f est continue en tout point.



On ne peut pas tracer la la courbe $\mathscr{C}_f$ sans lever le crayon, f présente une discontinuité en un point ; on dit qu'elle est discontinue en ce point.

Contre-Exemple : Des limites à droite et à gauche réelles mais différentes

Observons la fonction partie entière, notée E, définie sur $\mathbb{R}$. Ainsi , $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

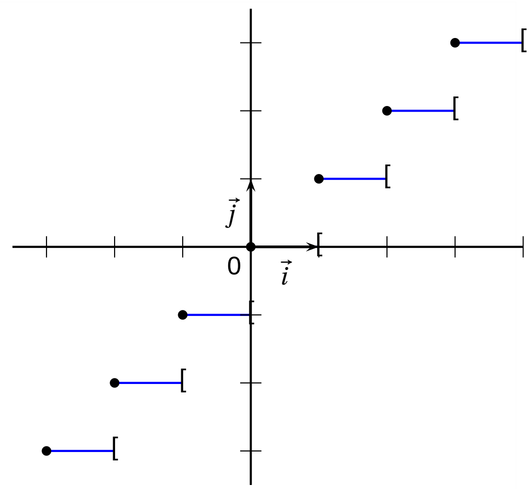
$$\mathrm{E}(x) = \text{le plus grand entier inférieur ou égal à } x$$

Par exemple $\mathrm{E}(\pi) = 3$, $\mathrm{E}(-\pi) = -4$ [a]
Ci-contre, nous avons tracé $\mathscr{C}_\mathrm{E}$.
Il est clair que E est continue sur tout intervalle du type $]x; x+1[$ où $x \in \mathbb{Z}$.
Par contre, E admet des discontinuités en tout entier. En effet on a par exemple :

$$\lim_{x\to 2^+} \mathrm{E}(x) = \mathrm{E}(2) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2^-} \mathrm{E}(x) = 1$$

Les limites à droite et à gauche étant différentes, la fonction partie entière n'admet pas de limite en 2.

Elle est donc discontinue en 2.



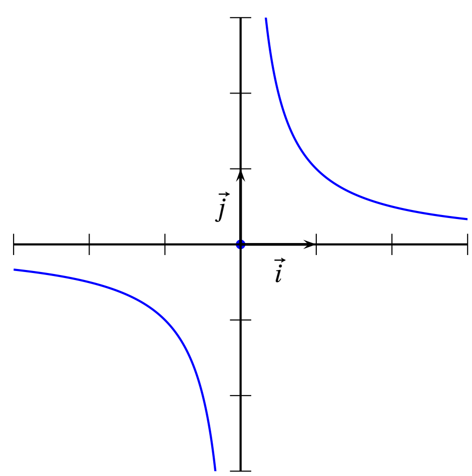
a. On remarquera que la fonction partie entière des mathématiciens n'est pas symétrique par rapport à 0, contrairement à celle des informaticiens qui considèrent que $\mathrm{E}(-\pi) = -3$

Remarque : Il est nécessaire que la fonction f soit définie en a pour parler de continuité, car sinon, la notation $f(a)$ n'a pas de sens ! (alors que $\lim_{x\to a} f(x)$ peut en avoir un et exister).
Par exemple, on ne peut pas parler de la discontinuité de la fonction inverse en 0, car la fonction n'est pas définie en 0.

Par contre, définissons la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On constate que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ et $f(0) = 0$. Donc cette fonction n'est pas continue en 0.



I.2. Continuité des fonctions usuelles

Théorème 1. (Admis)

Les fonctions polynômes, la fonction racine carrée, la fonction valeur absolue, les fonctions sinus et cosinus sont continues là où elles sont définies.

Théorème 2. (Admis)

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
- $f+g$ est une fonction continue sur I
- $f \times g$ est une fonction continue sur I
- λf est une fonction continue sur I
- Si de plus g est une fonction non nulle sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I
- Si g est continue sur un intervalle contenant $f(\mathrm{I})$, alors $f \circ g$ est continue sur I

Corollaire 1.

Toute fonction rationnelle à coefficients réels est continue sur son ensemble de définition.

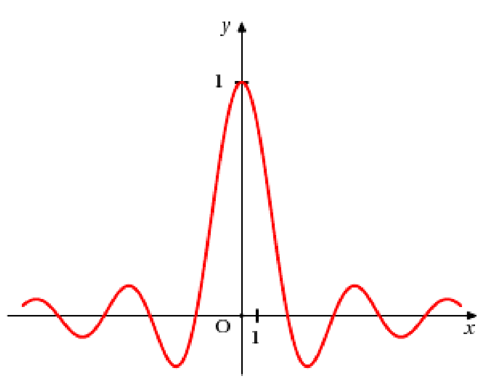
Exemples :

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+2x^2+1}}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions continues (polynômes, racine carré et quotient)
- On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1+x-2x^2$. Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto |u(x)|, \quad g : x \mapsto \frac{1}{u(x)} \text{ et } \quad h : x \mapsto \sqrt{u(x)}$$

- Soit A un réel fixé et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \mathrm{A} & \text{sinon.} \end{cases}$

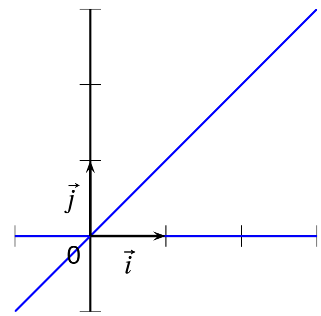
En observant la représentation graphique de f ci-contre, on peut conjecturer que A doit valeur 1 pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
On dit que l'on a prolongé f par continuité en 0.
Pour l'instant, nous ne pouvons faire qu'une conjecture, mais nous pourrons bientôt démontrer ce résultat.



Remarque : On dit souvent qu'une fonction continue est une fonction que l'on peut représenter par un trait continu (obtenu sans relâcher le crayon). Il faut rester méfiant par rapport à cette interprétation, car il existe en mathématiques des fonctions « monstres » comme :

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

En apparence on pourrait croire que cette courbe se trace sans lever le crayon et pourtant la fonction présente une infinité de discontinuités.



Propriété 1.

Toute fonction dérivable en a est continue en a. **La réciproque est fausse**.

Remarques :

- La fonction valeur absolue est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.
- La continuité d'une fonction en a traduit l'absence de « saut » en son point d'abscisse a
  La dérivabilité d'une fonction en a si sa courbe représentative admet une tangente non verticale en son point d'abscisse a.
- Par convention, les flèches d'un tableau de variations d'une fonction f traduisent la continuité et la stricte monotonie de f sur les intervalles considérés.

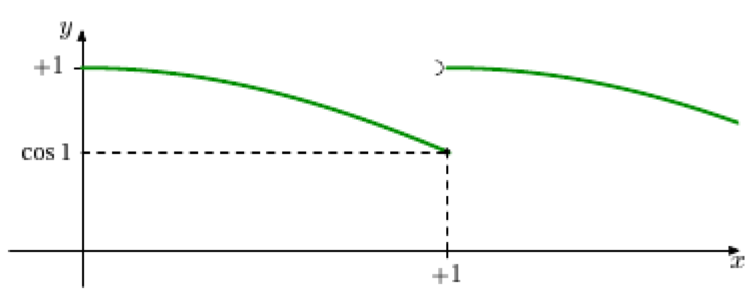
I.3. Quelques contre-exemples

Des limites à droite et à gauche réelles mais différentes

C'est le cas de la fonction partie entière ou encore de la fonction f définie sur $[0;2]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \in [0;1] \\ \cos(x-1) & \text{si } x \in]1;2] \end{cases}$$

On sait déjà que f est continue sur $[0;1[$ et sur $]1;2]$ comme composée de fonction continue.
De plus, on a $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \cos(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \cos(1) \neq 1$.
Ainsi, f n'admet pas de limite en 1 : elle est discontinue en 1 donc sur $[0;2]$.

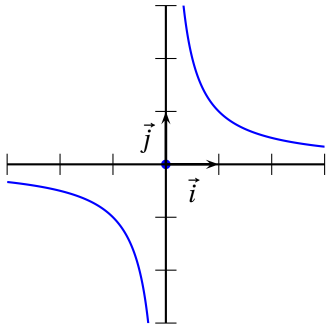


Des limites à droite et à gauche infinies

On a déjà traité un exemple de ce type avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

La fonction f n'est pas continue en 0.



Attention !
Il ne faut pas confondre cette fonction avec la fonction inverse qui est continue en tout point de son ensemble de définition !

Des limites à droite et à gauche réelles, égales mais différentes de la valeur de la fonction

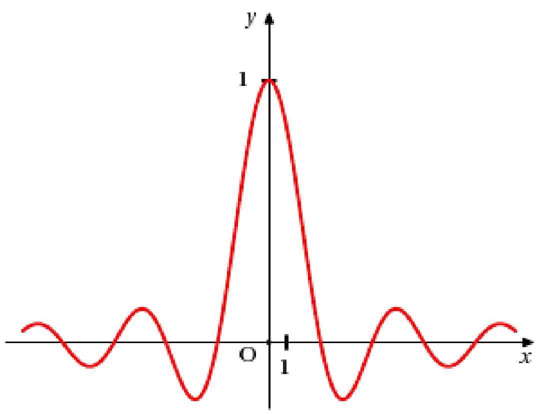
Modifions légèrement un exemple déjà traité.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} = 1 \quad \text{Mais} f(0) = 0$$

Donc cette fonction n'est pas continue en 0.

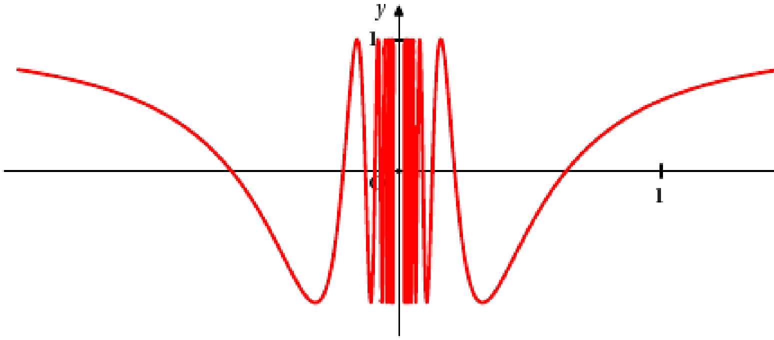


Les limites à droite et à gauche n'existent pas

Il faut avouer que dans la pratique, presque toutes les fonctions admettent une limite à droite et à gauche. Mais il est intéressant d'avoir vu quelques contre-exemple dans sa vie.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il n'existe pas de limite à droite et à gauche de 0 pour la fonction f. Par contre $f(0) = 0$.



Exercice(s) du livre : Déclic : n° 77 p 76 (graphique)
n° 79 à 81 p 77 (calculs simples)
n° 115-116-120 p 84 (approfondissement)

I.4. Applications de la continuité

I.4.a. Limite d'une suite

Théorème 3. (du point fixe - Admis)

Soient f une fonction **continue** sur un intervalle I et (u_n) une suite de réels de I convergente vers $\ell \in \mathrm{I}$.
Alors la suite $(f(u_n))_n$ converge vers $f(l)$, autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$$

Remarque : Nous connaissions déjà ce théorème lorsque la fonction ne contenait que des opérations sur les limites connues et nous l'utilisions pour déterminer la limite de suite récurrente. Désormais, il sera plus simple de le justifier.

Preuve **Hors Programme**

Comme f est continue en ℓ, on a :

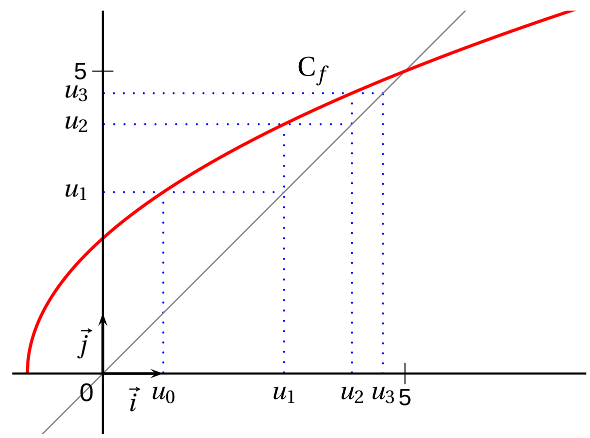
$$\lim_{x\to\ell} f(x) = f(l)$$

Considérons un intervalle ouvert J centré autour de $f(l)$. Il existe un intervalle ouvert L centré autour de ℓ tel que $f(x) \in \mathrm{J}$ pour tout $x \in \mathrm{L}$
Comme (u_n) converge vers ℓ, à partir d'un certain rang n_0 on aura $u_n \in \mathrm{L}$ et donc $f(u_n) \in \mathrm{J}$.

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5} \end{cases}$$



1. **a.** A l'aide de la représentation graphique ci-dessus, où f est définie par $f(x) = \sqrt{4x+5}$, conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n).

   b. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 5.

   c. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   d. En déduire que (u_n) converge vers un réel ℓ.

2. Expliquer pourquoi ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

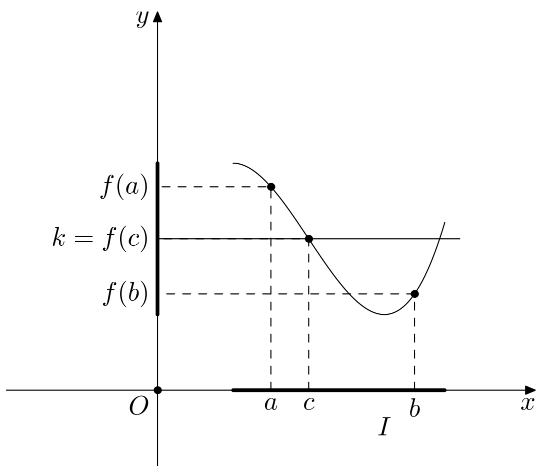
I.4.b. Nombre de solutions d'une équation

Théorème 4. (des valeurs intermédiaires - Admis)

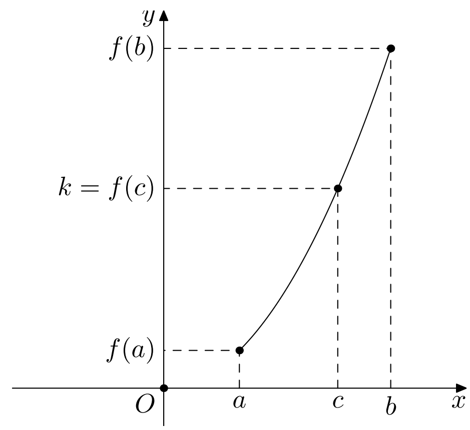
Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I et a et b deux réels de I.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$

Illustrations :

Cas d'une fonction non monotone :



Cas d'une fonction monotone :



Remarques :

- ⇝ L'hypothèse de continuité est essentielle, essayer d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction partie entière avec $a = 0$, $b = 1$ et $k = \dfrac{1}{2}$!
- ⇝ Le TVI permet d'affirmer l'existence de solution(s) mais ne permet pas de les trouver !
  En général, on en cherche une approximation par balayage à la calculatrice ou par dichotomie.

Preuve **HP**

Supposons $a < b$. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ et k un nombre réel tel que $f(a) \leq k \leq f(b)$ (le cas $f(b) \leq k \leq f(a)$ se traite exactement de la même manière).
On construit deux suites (a_n) et (b_n) telles que :

- ⇝ $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- ⇝ Si $f\left(\dfrac{1}{2}(a_0 + b_0)\right) \leq k$, on prend $a_1 = \dfrac{1}{2}(a_0 + b_0)$ et $b_1 = b_0$

  sinon, on prend $a_1 = a_0$ et $b_1 = \dfrac{1}{2}(a_0 + b_0)$.
- ⇝ On réitère le même processus pour construire tous les termes de la suite i.e si $f\left(\dfrac{1}{2}(a_n + b_n)\right) \leq k$ on prend $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $b_{n+1} = b_n$, sinon on prend $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$

Preuve (Suite)

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$$

2. Montrer que la suite (a_n) est croissante, puis que la suite (b_n) est décroissante.
En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

3. On note ℓ la limite commune des suites (a_n) et (b_n)

a. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$$

b. Conclure.

Exemple :

Démontrer que l'équation $2\cos x = x - 1$ admet un moins une solution dans $\mathbb{R}$

Application :

Toute fonction polynôme P de degré impair admet au moins une racine réelle.

Solution :

Dans le cas où le coefficient devant le monôme de plus haut degré est positif (l'autre cas est identique) on a :

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{P}(x) = -\infty$$

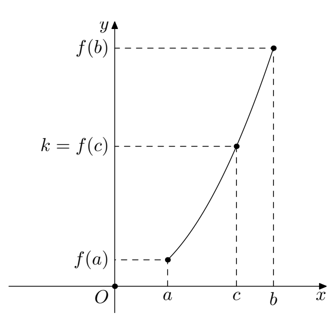
donc il existe $a \in \mathbb{R}^-$ tel que $\mathrm{P}(x) < 0$. De même :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{P}(x) = +\infty$$

donc il existe $b \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mathrm{P}(x) > 0$.
P est une fonction polynôme donc P est continue sur $[a;b]$ avec $\mathrm{P}(a) < 0$ et $\mathrm{P}(b) > 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{P}(c) = 0$

Corollaire 2. (Théorème de la bijection)

Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur $[a;b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ a une solution **unique** dans $[a;b]$.



Remarques :

- En ajoutant l'hypothèse de la monotonie, on récupère l'unicité de l'antécédent de k.
- Ce théorème s'étend au cas où f est définie sur un intervalle ouvert, semi-ouvert, borné ou non (les limites de f aux bornes de l'intervalle étant supposées connues).
- On convient que les flèches obliques dans un tableau de variations d'une fonction f traduisent la continuité et la stricte monotonie de f sur l'intervalle correspondant.

Preuve

- D'après le TVI, il existe un réel $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$, d'où l'existence.
- Considérons le cas où f est une fonction strictement croissante sur $[a;b]$.
  Pour tout $x < c$ on a $f(x) < f(c) = k$ et pour tout $x > c$ on a $f(x) > f(c) = k$.
  Donc pour tout $x \neq c$ de l'intervalle $[a;b]$ on a $f(x) \neq f(c)$, par conséquent c est unique.

Exemple :

La fonction f définie sur $[1;2]$ par $f(x) = x^3 + x$ est strictement croissante.
De plus, $f(1) = 2$ et $f(2) = 10$. Donc l'équation $f(x) = 3$ possède une unique solution α dans $[1;2]$.
On cherche à connaître α à 10^{-1} près.

- **Par balayage** Cela consiste à calculer $f(x)$, pour x allant de 1 à 2, tous les 10^{-1}. On fait donc un tableau de valeurs.
  On cherche deux valeurs succesives de x pour lesquelles les images encadrent 3.
  On trouve $f(1.2) \simeq 2.93$ et $f(1.3) \simeq 3.50$. Donc $\alpha \simeq 1.2$
- **Par dichotomie** Cela consiste à calculer $f(x)$ en prenant pour x le centre de l'intervalle de départ. On peut alors se ramener à un intervalle d'amplitude réduite de moitié, en fonction de si on a dépassé ou non la valeur cherchée.
  On réitère le processus jusqu'à l'amplitude voulue (à la n^{eme} étape, on aura réduit l'amplitude de 2^n).
  Ici on fait $f(1,5) = 4,875 > 3$. Donc $\alpha \in [1;1.5]$.
  Puis $f(1.25) \simeq 3.2 > 3$ donc $\alpha \in [1;1.25]$. $f(1.125) \simeq 2.55 < 3$ donc $\alpha \in [1.25;1.125]$.
  $f(1.1875) \simeq 2.86$ donc $\alpha \in [1.1875;1.125]$. L'amplitude de cette intervalle est inférieur à 0.1, donc $\alpha \simeq 1.2$.

Remarque : Grâce à la calculatrice, la méthode de balayage est souvent plus rapide. Cependant, quand l'amplitude de départ est grande, ou l'approximation très petite, il est intéressant de combiner les deux méthodes, en commençant par la dichotomie, et finissant par le balayage.

Exemple :

Dénombrer les solutions réelles de l'équation $x^5 - 5x = -1$ et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

Exercice(s) du livre : Déclic : n° 18 p 64 (algo)
n° 86 (tbx) - 89 à 91 p 77 (applications simples)
n° 95-96 p 78 (nombre de solutions en fonction d'un paramètre + graphique différent du calcul)
n° 129 p 87 (point fixe)
DM : n° 94-98 p 78 (algo + problème autour d'une bille)

II) Dérivabilité

II.1. Le nombre dérivé

Définition 2.

Rappelons simplement qu'une fonction f est **dérivable en un réel** a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel lorsque h tend vers 0.
Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé de** f **en** a, et est notée $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Une fonction f est **dérivable sur un intervalle** I lorsqu'elle est dérivable en tout $a \in \mathrm{I}$.
Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction qui à tout $x \in \mathrm{I}$ associe le nombre $f'(x)$.

Remarque : En Première, on vous a introduit le nombre dérivé d'une fonction f en a comme le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse A. Rappelons alors la propriété suivante.

Propriété 2.

Soit f une fonction, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$, dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et A le point d'abscisse a de $\mathscr{C}_f$.
L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Preuve

L'équation réduite de la tangente T_a à $\mathscr{C}_f$ passant par A est de la forme :

$$y = mx + p \qquad \text{avec } m = f'(a)$$

De plus, comme $\mathrm{A}(a; f(a))$ est un point de T_a, les coordonnées de A vérifient l'équation de T_a :

$$f(a) = f'(a)a + p \Longleftrightarrow p = f(a) - f'(a)a$$

Au final l'équation de T_a est $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a \Longleftrightarrow y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

1. **a.** Faire afficher sur la calculatrice le nombre dérivée de f en 0.

   b. Vérifier que le calcul de $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ conduit à une forme indéterminée.

   c. Utiliser la quantité conjuguée de $\sqrt{h^2+1}-1$ pour montrer que $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{h}{\sqrt{h^2+1}+1}$ et conclure.

   d. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représantative de f au point d'abscisse 0.

2. **a.** En vous inspirant de la méthode précédente, déterminer $f'(1)$.

   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représantative de f au point d'abscisse 1.

   c. Vérifier le résultat à la calculatrice.

II.2. Fonctions dérivées

Travail de l'élève **1.**

1. Soit u une fonction positive et dérivable sur un intervalle I et g la fonction définie sur I par $g(x) = \sqrt{u(x)}$.
   On cherche à savoir si la fonction g est dérivable sur I et à connaître son éventuelle fonction dérivée.
   Soit $a \in \text{I}$.

   a. Vérifier que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}$ conduit à une forme indéterminée.

   b. S'inspirer de la méthode de l'exemple précédent pour montrer que $\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} \times \dfrac{1}{\sqrt{u(a+h)}+\sqrt{u(a)}}$.

   c. Conclure.

2. Soit u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle I. On cherche à savoir si la fonction u^n est dérivable sur I, et à connaître son éventuelle fonction dérivée en fonction de n.

   a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel non nul n, on a $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

   b. Soit $m > 0$.

   i. Montrer que $\left(\dfrac{1}{u^m}\right)' = \dfrac{-mu'}{u^{m+1}}$

   ii. En déduire que pour tout $n < 0$, on a $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

   c. Conclure.

Les dérivées des fonctions de référence sont, je l'espère, déjà acquises. Aussi, nous ne rappelons et complétons ici que les règles pour les composées de fonctions.

Dans le tableau suivant, u et v désignent deux **fonctions** dérivables sur un intervalle I et k désigne un nombre réel.

Fonctions	Dérivées	Domaine de dérivabilité
ku	ku'	I
$u+v$	$u'+v'$	I
$u\times v$	$u'v+uv'$	I
u^n, $n\in\mathbb{Z}^*$	$nu'u^{n-1}$	I
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	I
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	I
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	I privé des x tels que $u(x)=0$.

Exemples :

Si $f(x)=(5x+3)^7$ sur $\mathbb{R}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=7\times5\times(5x+3)^6=35(5x+3)^6$.

Si $g(x)=\sqrt{5x+3}$ sur $\left[\dfrac{3}{5};+\infty\right[$ alors g est dérivable sur $\left]\dfrac{3}{5};+\infty\right[$ et $g'(x)=\dfrac{5}{2\sqrt{5x+3}}$.

Preuve

Démontrons uniquement les résultats nouveaux (Cf travail de l'élève précédent)

⇝ $(u^n)'=nu'u^{n-1}$ pour $n\in\mathbb{Z}^*$

Raisonnons par récurrence sur $\mathbb{N}^*$.

Pour $n=1$, on a $(u^n)'=(u^1)'=u'$ et $nu'u^{n-1}=1\times u'\times u^{1-1}=u'$.

Donc la proposition est vraie au rang 1.

Supposons qu'il existe un $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $(u^k)'=nu'u^{k-1}$.

Alors on a $u^{k+1}=u^k\times u$.

On applique la formule pour dériver un produit et on obtient

$$(u^{k+1})'=ku'u^{k-1}\times u+u^k\times u'=ku'u^k+u'u^k=(k+1)u'u^k$$

Donc la proposition est héréditaire. Elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Supposons désormais que $n<0$, alors $m=-n$ est strictement positif. Ainsi

$$u^n=\frac{1}{u^{-n}}=\frac{1}{u^m}=\left(\frac{1}{u}\right)^m$$

avec $m>0$.

Preuve (Suite)

D'après ce qui précède, et la formule de dérivée de l'inverse, on a alors :

$$\begin{aligned}(u^n)' &= \left(\frac{1}{u^m}\right)' \\ &= \frac{0\times u^m - mu'u^{m-1}\times 1}{u^{2m}} \\ &= \frac{-mu'}{u^{2m-(m-1)}} \\ &= \frac{-mu'}{u^{m+1}} \\ &= \frac{nu'}{u^{-n+1}} \\ &= nu'\times u^{n-1}\end{aligned}$$

Donc la proposition est vrai aussi pour tout $n<0$. Au final, elle est vraie sur $\mathbb{Z}^*$.

⇝ $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Soit $a\in\mathrm{I}$. Le taux d'accroissement de $\sqrt{u}$ en a est :

$$\begin{aligned}\tau(a) &= \frac{\sqrt{u(a+h)}-\sqrt{u(a)}}{h} \\ &= \frac{u(a+h)-u(a)}{h\left(\sqrt{u(a+h)}+\sqrt{u(a)}\right)} \quad \text{multiplication par l'expression conjuguée)}\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\lim_{h\to 0}\tau(h) = \lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\times\frac{1}{\sqrt{u(a+h)}+\sqrt{u(a)}} = u'(a)\times\frac{1}{2\sqrt{u(a)}}$$

Ceci est bien un réel car $u(a)\neq 0$, et ceci est vrai pour tout $a\in\mathrm{I}$ telle que $u(a)\neq 0$. Donc on obtient le résultat du tableau.

II.3. Composée d'une fonction affine suivie d'une fonction f

Théorème 5.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et a, b deux réels. On note J l'intervalle formé des réels x tels que $(ax+b)\in\mathrm{I}$ et $\begin{array}{cccc} g & : & \mathrm{J} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(ax+b)\end{array}$.

La fonction g est dérivable sur J et pour tout $x\in\mathrm{J}$ on a $g'(x) = a\times f'(ax+b)$

Exemple :

On constate que les exemples précédents peuvent être retrouvés grâce à ce théorème. Il nous sera par contre indispensable pour les fonctions affine suivie d'une fonction cosinus ou sinus.

Preuve

Soit $t \in \mathrm{J}$. Le taux d'accroissement de g en t est :

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{g(t+h)-g(t)}{h}\\ &= \frac{f(a(t+h)+b)-f(at+b)}{h}\\ &= \frac{f(at+b+ah)-f(at+b)}{h}\end{aligned}$$

On pose $\mathrm{T}=at+b$ et $\mathrm{H}=ah \iff h=\dfrac{\mathrm{H}}{a}$. Alors on a :

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{f(\mathrm{T}+\mathrm{H})-f(\mathrm{T})}{\frac{\mathrm{H}}{a}}\\ &= a\times\frac{f(\mathrm{T}+\mathrm{H})-f(\mathrm{T})}{\mathrm{H}}\end{aligned}$$

Comme $t \in \mathrm{J}$, on a $\mathrm{T} \in \mathrm{I}$ par définition de J. Donc f est dérivable en T.
De plus, quand h tend vers 0, $\mathrm{H}=ah$ aussi. D'où :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\tau(h) &= \lim_{\mathrm{H}\to 0} a\times\frac{f(\mathrm{T}+\mathrm{H})-f(\mathrm{T})}{\mathrm{H}}\\ &= a\times\lim_{\mathrm{H}\to 0}\frac{f(\mathrm{T}+\mathrm{H})-f(\mathrm{T})}{\mathrm{H}}\\ &= af'(\mathrm{T})\\ &= af'(at+b)\end{aligned}$$

D'où $g'(t)=af'(at+b)$. Ceci étant vrai pour tout $t \in \mathrm{J}$, on a bien le théorème.

Remarque : Les trois cas démontrés cette année sont en fait des cas particuliers de la dérivée d'une fonction composée $g=f(u(x))$.
On admettra le résultat général (non au programme) suivant :

$$g'(x)=u'(x)\times f'(u(x))$$

Exercice(s) du livre : Déclic : n° 101-112 p 80 (fonctions rationnelles + Xcas)
n° 107 p 83 (asymptote oblique)
n° 108 p 83 (fonction auxiliaire classique)
n° 127 p 87 (suite des polynômes de Tchebychev)

III) Etude des fonctions trigonométriques de référence

III.1. Variations et propriétés

Travail de l'élève **2.** *On utilise le logiciel Géogébra.*

1. **Figure de base**
   - **a.** Ouvrir Géogébra et faire afficher le repère orthonormé $(O; I; J)$.
   - **b.** Choisir le radian comme unité d'angle dans « Options ».
   - **c.** Tracer le cercle trigométrique de centre O.
   - **d.** Créer un curseur t, variant entre -5π et 5π.
   - **e.** On veut placer un point M associé au réel t sur le cercle.
     Pour cela, dans la ligne de commande, saisir l'instruction suivante : $M = (1; t)$
     Remarque : Attention, le point-virgule est essentiel ! En effet, le couple $(1; t)$ ne désigne pas pour Géogébra les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(O; I; J)$, mais lui indique que M sera à une distance 1 de l'origine O du repère (donc il sera bien sur le cercle), et tel que $\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}\right) = t$ radians. On parle de coordonnées **polaires**.
   - **f.** Créer en ligne de commande le point C de coordonnées $(x_M, 0)$ et le point S de coordonnées $(0, y_M)$
2. **Variations**
   - **a.** Quelle est l'abscisse du point M dans le repère $(O; I; J)$? Son ordonnée ?
   - **b.** Avec le curseur, déplacer le point M.
     Décrire son trajet, ainsi que ceux de C et de S correspondants.
   - **c.** En déduire les tableaux de variations des fonctions sinus et cosinus sur $[-5\pi; 5\pi]$.
     On précisera les valeurs où ces fonctions s'annulent.
3. **Courbes représentatives**
   - **a.** Compléter la figure précédente en crééant les points R et Q de coordonnées respectives (t, x_M) et (t, y_M).
   - **b.** Faire afficher leurs traces. Quelles courbes représentatives voient-on se dessiner ?
   - **c.** Vérifier la cohérence entre les courbes obtenus et vos tableaux.
4. **Propriétés**
   - **a.** Quelles propriétés constatez-vous pour les deux courbes ? Pouvez-vous la justifier ?
   - **b.** Quelle symétrie observez-vous pour la courbe représentative de la fonction cosinus ? Pouvez-vous la justifier ?
     Connaissez-vous d'autres fonctions de référence possédant cette propriété ?
   - **c.** Quelle symétrie observez-vous pour la courbe représentative de la fonction sinus ? Pouvez-vous la justifier ?
     Connaissez-vous d'autres fonctions de référence possédant cette propriété ?

Travail de l'élève **3.** En complément pour la parité (en AP ? ?) : Activité 3 p 93 (Déclic)

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$, on peut associer à tout réel x un unique point M sur le cercle trigonométrique (orienté, de rayon 1 avec une origine).

Définition 3.

La fonction qui à tout réel x associe l'abscisse de M est la fonction cosinus, notée cos. Ainsi $x \longmapsto \cos(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction qui à tout réel x associe l'ordonnée de M est la fonction sinus, notée sin. Ainsi $x \longmapsto \sin(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Propriété 3. (Définitions)

Pour tout réel x, les points du cercle trigonométrique associés aux réels x et $(x+2\pi)$ sont confondus. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(x+2\pi) = \sin(x)$$

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques**, de période 2π.

Remarques :

- Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction périodique, de période T (ie telle que $f(x+\mathrm{T}) = f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{D}_f$) sur l'intervalle $[0;\mathrm{T}]$ est la même que sur tout intervalle du type $[k\mathrm{T};(k+1)\mathrm{T}]$, où $k \in \mathbb{Z}$.
- Grâce à cette propriété, il suffira d'étudier ces fonctions sur un intervalle de taille 2π de notre choix, par exemple $[-\pi;\pi]$.

Propriété 4. (Définitions)

Pour tout réel x, les points M et M' du cercle trigonométrique, associés respectivement à x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$

On dit que la fonction cosinus est **paire** et la fonction sinus est **impaire**.

Remarques :

- Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction paire (ie tel que $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{D}_f$) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
  Celle d'une fonction impaire (ie telle que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{D}_f$) est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- Grâce à cette propriété, on peut limiter l'étude de ces fonctions à un intervalle de longueur π, par exemple $[0;\pi]$

Reproduire les tableaux et les illustrations de la page 94 du Déclic, pour résumer les résultats précédents.

III.2. Dérivées

Travail de l'élève **4.** Déclic : Activité 2 p 92

Théorème 6.

Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (donc continues sur $\mathbb{R}$ aussi) et pour tout réel x on a :

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin'(x) = \cos(x)$$

Preuve

Exo 44 p 108

Propriété 5.

On en déduit la limite suivante à connaître :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Preuve

On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h} = \sin'(0) = 1$

Exercice(s) du livre : Déclic : n° 12 p 99 (fct tangente, en DM ?)
n° 23 + 28 à 31 + 45 + 47 + 59 + 60 p 105 (dérivées et limites)
n° 50-51-53-65 p 108 (étude de fonctions, tangente)
n° 66-72 p 111 (avec une fonction auxiliaire) n° 68 p 113 (suite de fonctions) n° 71 p 111 (TVI avec trigo)