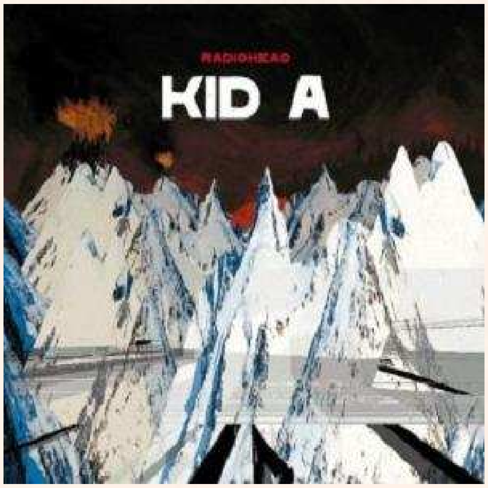
CHAPITRE 3

LES VECTEURS À LA CONQUÊTE DE L'ESPACE

HORS SUJET



TITRE : « Kid A »
AUTEUR : RADIOHEAD
PRÉSENTATION SUCCINTE DE L'AUTEUR : Kid A est le quatrième album du groupe de rock britannique Radiohead, il est sorti en 2000. Alors que les albums précédents (tel OK Computer) restent dans un style rock alternatif, les albums suivants sont beaucoup plus psychédéliques : Kid A marque l'apogée de ce style expérimental de Radiohead. Pour cette raison, il est considéré par beaucoup comme un chef-d'œuvre. Dans cet album, les guitares ont quasiment disparu au profit de synthétiseurs et de sampleurs. Le nom donné à l'album, Kid A (littéralement « Enfant A »), évoque pour certains un premier enfant cloné. Pour d'autres, il laisse penser que le groupe le considère comme son premier enfant. Avec Kid A, l'album suivant de Radiohead, Amnesiac, forme un diptyque de musique expérimentale, un prolongement : Kid A et Amnesiac forment en réalité le diptyque Kid Amnesiac. Ce disque comporte une majorité de chansons composée principalement de synthétiseurs et de boîtes à rythmes (Kid A, Idioteque, Everything in Its Right Place...), tout en gardant des sonorités pop/rock (In Limbo) et en explorant d'autres univers comme le free-jazz (The National Anthem). Selon Thom Yorke et Jonny Greenwood cet album est inspiré en partie par le livre No Logo de la journaliste canadienne Naomi Klein. Les membres du groupe pensaient d'ailleurs au départ à appeler l'album No Logo, en hommage à ce livre qui décrit la société de consommation.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Connaître les diverses positions relatives de l'espace
- ⇝ Trouver des sections de cubes par un plan
- ⇝ Utiliser les vecteurs dans l'espace
- ⇝ Découvrir la représentation paramétrique d'une droite

« *I wish I was special* »
RADIOHEAD (EXTRAIT DE CREEP)

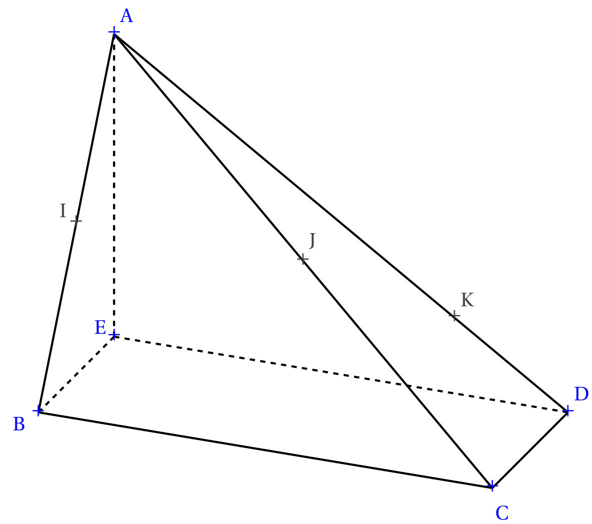
LES VECTEURS À LA CONQUÊTE DE L'ESPACE

Résumé

I) Le point sur l'espace

I.1. Positions relatives des objets

Travail de l'élève **1.** ABCDE est la pyramide ci-dessous, telle que sa base BCDE est un parallélogramme.
I est le milieu de [AB] et J celui de [AC]. K est le point du segment [AD] tel que $AK = \dfrac{3}{4}AD$.

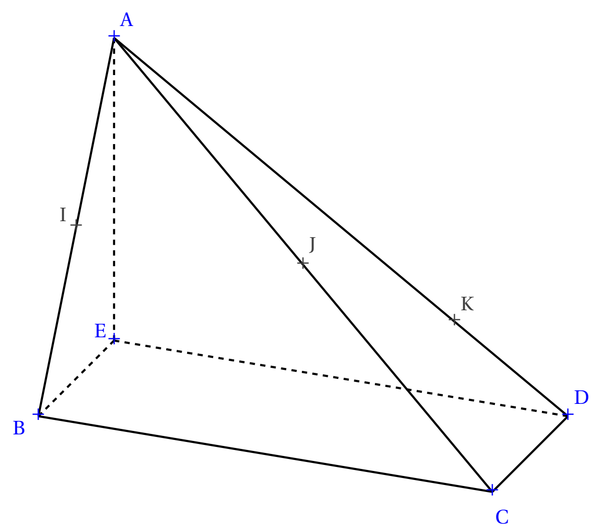


1. Déterminer la position relative et les intersections éventuelles

a. des droites :
- ⇝ (IJ) et (BC)
- ⇝ (JK) et (CD)
- ⇝ (JK) et (BC)

b. de la droite et :
- ⇝ (BC) et (ADE)
- ⇝ (IJ) et (BCD)
- ⇝ (JK) et (ACD)
- ⇝ (JK) et (ADE)
- ⇝ (JK) et (BCD)

c. des plans :
- ⇝ (BCD) et (AIE)
- ⇝ (IJK) et (ABC)
- ⇝ (IJK) et (ADE)
- ⇝ (ABC) et (ADE).

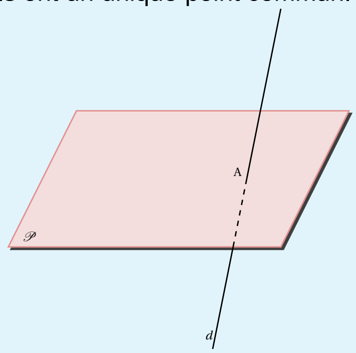


2. Grâce à certaines des questions précédentes, tracer la section du tétraèdre ABCDE par le plan (IJK) sur la figure ci-contre.

Une droite et un plan

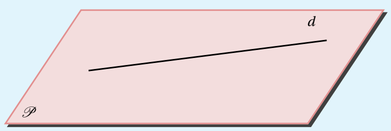
Soient d est une droite et P un plan de l'espace. Il n'existe que deux possibilités :

1. La droite et le plan sont sécants.
Ils ont un unique point commun.

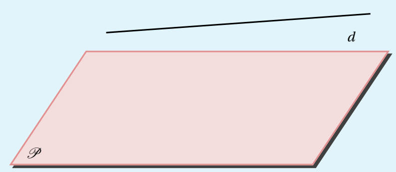


2. La droite et le plan sont parallèles.

a. La droite est incluse dans le plan.
Ils ont une infinité de points communs.



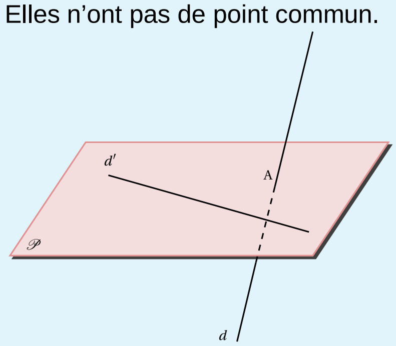
b. La droite est strictement parallèle au plan.
Ils n'ont aucun point commun



Deux droites

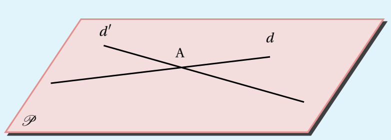
Soient d et d' deux droites de l'espace. Il n'existe que deux possibilités :

1. Les droites sont non coplanaires.
Il n'existe aucun plan contenant ces deux droites.
Elles n'ont pas de point commun.

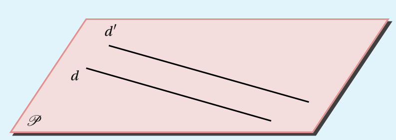


2. Les droites sont coplanaires.
Il existe un plan contenant ces deux droites.

a. Les droites sont sécantes.
Elles ont un unique point commun.



b. Les droites sont parallèles.
Elles n'ont pas de point commun.



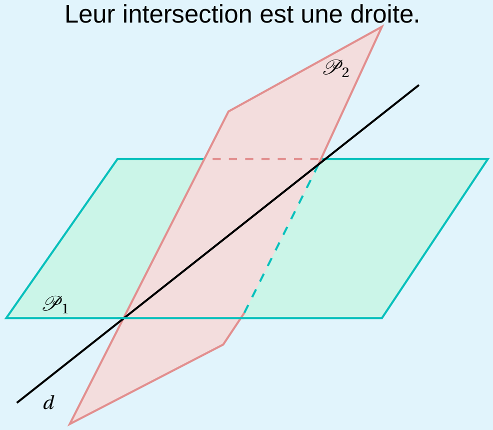
Remarque : Dans l'espace,

- Deux droites sans points commun ne sont pas forcément parallèles ! Elles peuvent être non coplanaires.
- Deux droites qui ne sont pas parallèles n'ont pas toujours de point commun ! Elles peuvent être non coplanaires.
- Un plan est entièrement déterminé par deux droites sécantes.
- Un plan est entièrement déterminé par deux droites strictement parallèles.

De deux plans

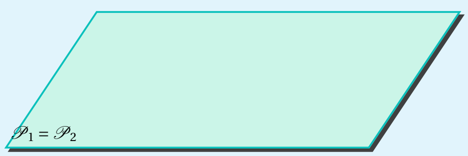
Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans de l'espace. Il n'existe que deux possibilités :

1. Les plans sont sécants.
Leur intersection est une droite.

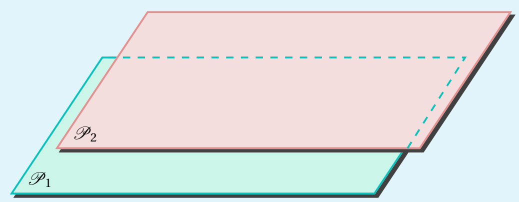


2. Les plans sont parallèles.

a. Les plans sont confondus.
Ils ont une infinité de points communs.



b. Les plans sont strictement parallèles.
Ils n'ont aucun point commun.



Remarque : Ainsi deux plans distincts qui dont on connait deux points communs sont sécants suivant la droite définie par ces deux points.

Distribuer également les schémas sur un cube (Math'x p 306).

Exemple :

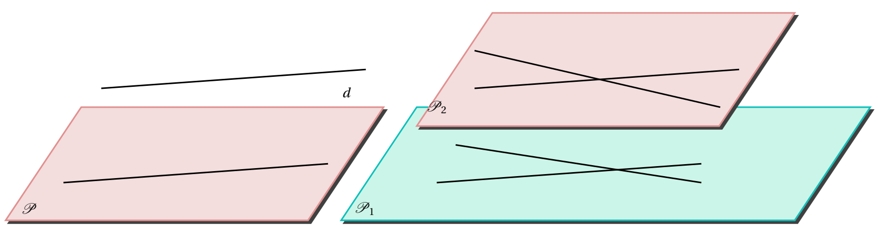
1. ABCD est un tétraèdre. Le point I est le milieu de $[\mathrm{AB}]$ et J est le point de $[\mathrm{AD}]$ tel que $\mathrm{AJ} = \dfrac{2}{3}\mathrm{AD}$.
   Déterminer l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD).
2. $\mathrm{ABCDEFGH}$ est un cube. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[\mathrm{EF}]$, $[\mathrm{FB}]$ et $[\mathrm{FG}]$.
   Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (ABC).

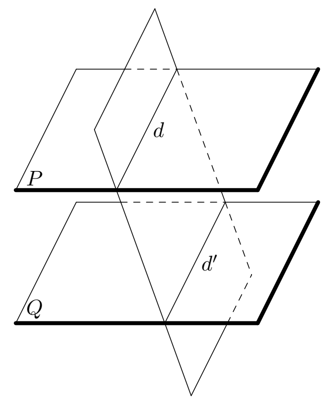
Exercice(s) du livre : [Déclic] n° 21-22-23-24 p 274 (lecture de positions relatives)

I.2. Quelques propriétés de parallélisme

Propriété 1.

- Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.
- Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.
- Si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.



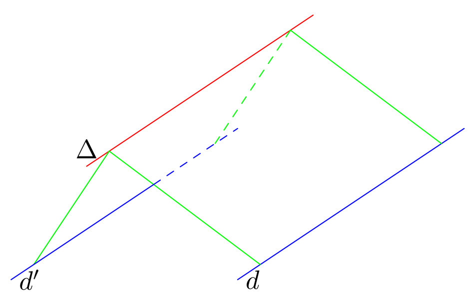


Preuve

Soient d et d' les droites d'intersection. Elles sont coplanaires, donc soit parallèles, soit sécantes. Or si elles sont sécantes en un point M alors M appartient à $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, ce qui est absurbde. Donc elles sont strictement parallèles.

Théorème 1. (du toit)

Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plan sécants selon une droite Δ. Si une droite d de $\mathscr{P}$ est parallèle à une droite d' de $\mathscr{P}'$, alors Δ est parallèle à d et d'.



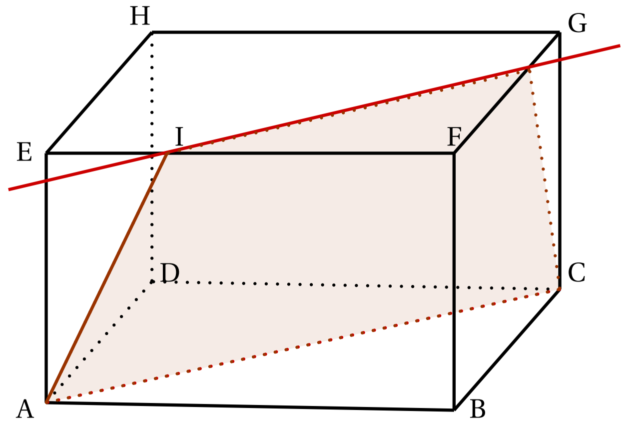
Exercice(s) du livre : [Déclic] n° 25-26-27-28 p274 (démonstration de positions relatives)

Exemple :

Soit $\mathrm{ABCDEFGH}$ un pavé droit. Soit I un point de $[\mathrm{EF}]$. Déterminer et tracer l'intersection des plans (EFG) et (ACI).

Solution :

Les plans (ABC) et (EFG), qui contiennent les faces ABCD et AFGH du pavé, sont parallèles.
$I \in (ACI)$, mais $I \notin (ABC)$, donc les plans (ACI) et (ABC) ne sont pas confondus. Comme A et C sont deux points communs aux plans (ACI) et (ABC), on peut conclure que les plans (ABC) et (ACI) sont sécants selon la droite (AC).
On a donc $(ABC)//(EFG)$ et $(ACI) \cap (ABC) = (AC)$. On en déduit que le plan (ACI) coupe également le plan (EFG), selon une droite parallèle à (AC).
L'intersection de ces deux plans est donc la droite parallèle à (AC) passant par I.



I.3. Sections

Tous les résultats énoncés dans cette partie seront admis et aucune démonstration ne sera présentée, de plus on s'intéresse au cas où l'intersection est non vide.

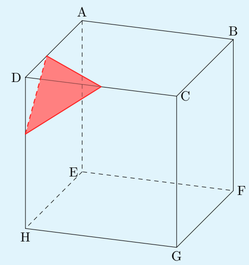
Pour trouver l'intersection d'un solide avec un plan $\mathscr{P}$, on cherche l'intersection de chacune des faces du solide avec le plan $\mathscr{P}$.
A chaque étape, on doit se poser les questions suivantes dans cet ordre :

- Connait-on deux points de $\mathscr{P}$ sur une même face du solide ?
  Dans ce cas, on les relie et on prolonge le segment jusqu'aux arêtes de la face concernée.
  On obtient deux nouveau points et on revient à la première question.
- Si l'on connait l'intersection de $\mathscr{P}$ avec une face du solide, connait-on un point de $\mathscr{P}$ sur l'éventuelle face du solide parallèle à la première ?
  Dans ce cas, on utilise la troisième propriété, et on trace la parallèle à l'intersection connue passant par le point connu. On s'arrête aux arêtes de la face concernée.
  On obtient deux nouveaux points et on revient à la première question.
- Si l'on n'est pas dans l'un des cas précédents, on doit construire un point à l'extérieur du solide, qui est commun à $\mathscr{P}$ et à l'un des plans portés par l'une des face du solide. Et cela devient très complexe à expliquer, donc mieux vaut avoir écouter en cours ...

Sections planes d'un cube

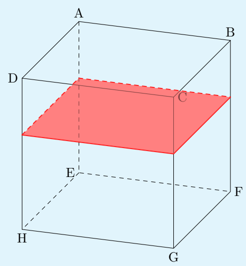
La section d'un cube par un plan $\mathscr{P}$ peut être de la nature suivante :

⇝ Un **triangle** (éventuellement réduit à un point) : on ne se pose que la première question

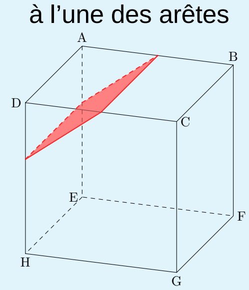


⇝ Un **quadrilatère** : on ne se pose les deux premières questions

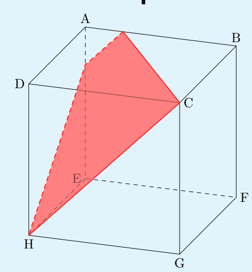
Un **Carré** lorsque $\mathscr{P}$ est parallèle à l'une des faces



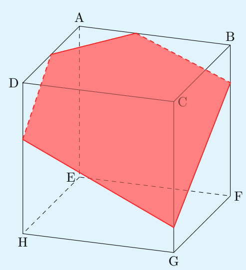
Un **Rectangle** (éventuellement un segment) lorsque $\mathscr{P}$ est parallèle à l'une des arêtes



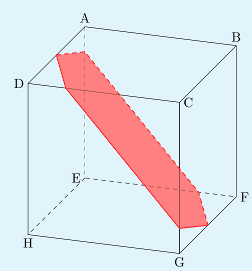
Un **trapèze**



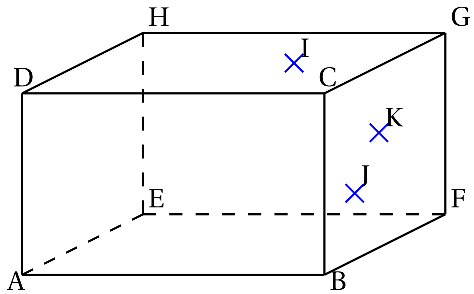
⇝ Un **pentagone** : on se pose les 3 questions



⇝ Un **hexagone** : on se pose les 3 questions

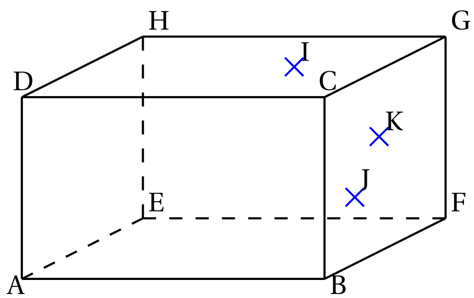


Exercice 1 :



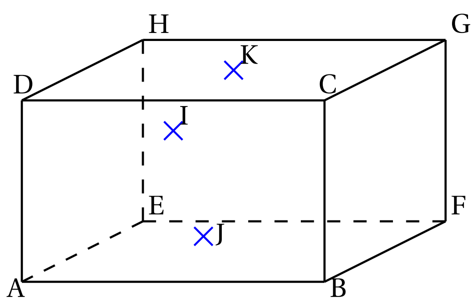
On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que J et K sont dans (BFG) et I ∈ (CDH), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 2 :



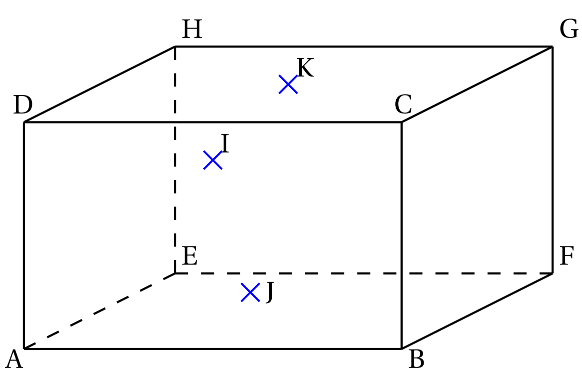
On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que J et K sont dans (EFG) et I ∈ (CDH), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 3 :



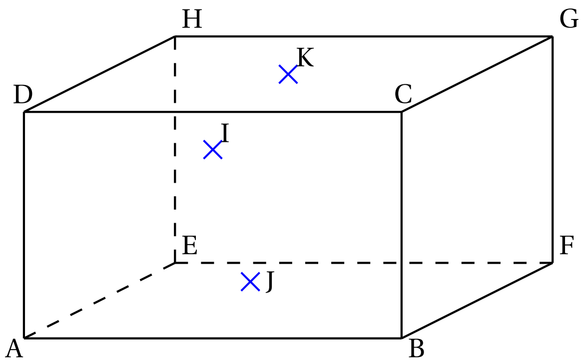
On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que I et J sont dans (ABC) et K ∈ (DCG), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 4 :



On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que I et J sont dans (ABC) et K ∈ (EFG), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

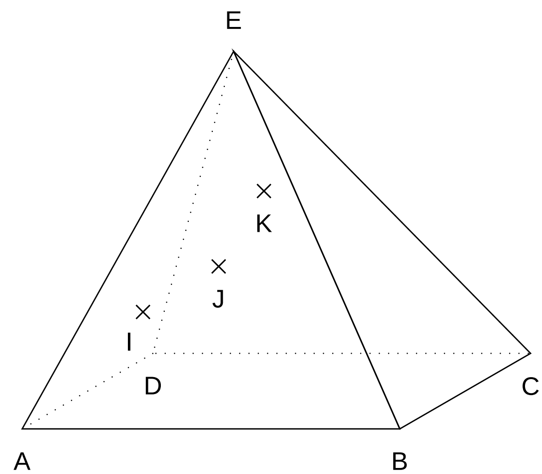
Exercice 5 : (Pour les experts)



On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que I et K sont dans (EFG) et J ∈ (ABF), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 6 :

On considère une pyramide de base ABCD et de sommet principal E, et I et J deux points de la face ABE et K un point de la face CDE, comme sur la figure ci-contre.
On se propose de tracer l'intersection de (IJK) et de (ABCDE).



1. Pouvez-vous le faire sans indication supplémentaire ?
2. **a.** Caractériser l'intersection (Δ) des plans (ABE) et (CDE).
   La tracer.

   b. Placer $L = (IJ) \cap (\Delta)$. Donner trois plans auxquels L appartient.

   c. En déduire $(IJK) \cap (CDE)$.
3. Tracer l'intersection de (IJK) et de la pyramide.

Exercice 7 : (Pour les experts)

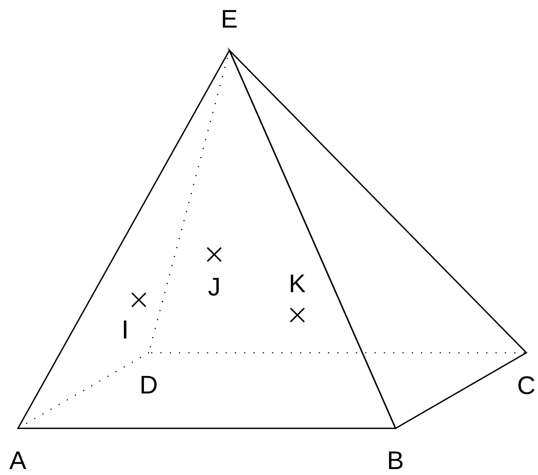
On considère une pyramide de base ABCD et de sommet principal E, et I et J deux points de la face ABE et K un point de la face CDE, comme sur la figure ci-contre.
On se propose de tracer l'intersection de (IJK) et de (ABCDE).

1. **a.** Caractériser l'intersection (Δ) des plans (ABE) et (CDE). La tracer.

   b. Placer $L = (IJ) \cap (\Delta)$. Donner trois plans auxquels L appartient.

   c. En déduire $(IJK) \cap (CDE)$. La tracer
2. **a.** Placer $M = (IJ) \cap (ABC)$.

   b. En déduire $(IJK) \cap (ABC)$.
3. Tracer l'intersection de (IJK) et de la pyramide.

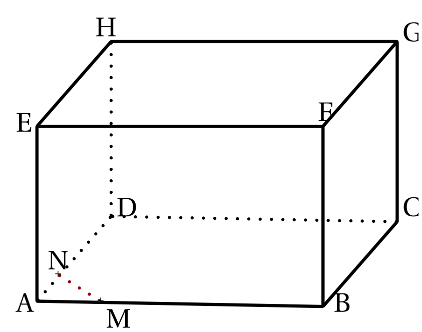


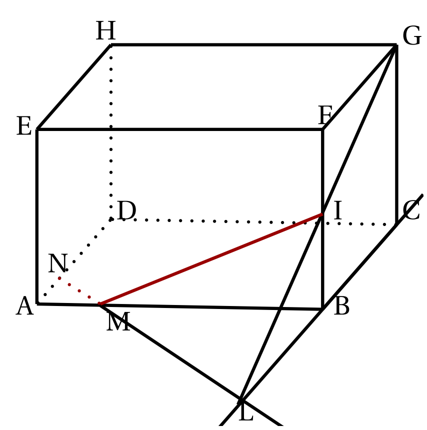
Exercice 8 : Soit ABCDEFGH un pavé droit. Soit N et M deux points respectivement situés sur les arêtes [AD] et [AB]. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (MNG) à l'aide du logiciel géogébra.

Solution :

Voici les différentes étapes :

1. **Trace du plan** (MNG) **sur la face** ABCD
   M et N sont deux points communs aux plans (ABC) et (MGN).
   L'intersection de ces deux plans est donc la droite (MN), et la trace du plan (MGN) sur la face ABCD est donc le segment [MN]. (en pointillés rouge sur la figure).
2. **Trace du plan** (MNG) **sur les faces** BCGF **et** ABFE**.**
   Le point G est commun aux plans (MNG) et (BCG). Il suffit de trouver un second point commun aux deux plans.
   (MN) ⊂ (MGN) et (BG) ⊂ (BCG) donc le point d'intersection de (MN) et (BC) appartient à la fois aux plans (MNG) et (BCG. Appelons L ce point. On en déduit que l'intersection des plans (MNG) et (BCG) est la droite (GL).
   Soit I le point d'intersection de (GL) et (BF) : les segments [GI] et [MI] sont les traces du plan (MNG) sur les faces BCGF et ABFE respectivement (en traits pleins rouge sur la figure).





Solution :

3. Traces du plan (MNG) **sur les faces** CGHD **et** ADHE

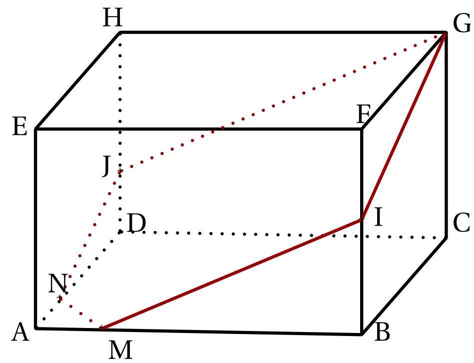
Les plans (ADH) et (BCG) sont parallèles. Le plan (MGN) coupe le plan (BCG) selon la droite (GI). On en déduit que (MGN) coupe (ADH) selon une droite parallèle à (GI).

$N \in [AD] \subset (ADH)$ donc $N \in (ADH)$.

De plus, par définition $N \in (MGN)$. N appartient donc à l'intersection des plans (MGN) et (ADH).

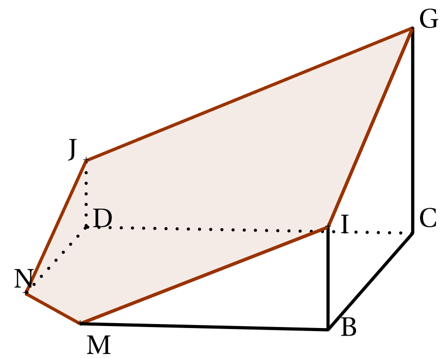
On en déduit que l'intersection de ces deux plans est la droite parallèle à (GI) passant par N.

Cette droite coupe l'arête [DH] en un point J : les segments [NJ] et [JG] sont donc les traces du plan (MNG) sur les faces ADHE et CGHD respectivement (en traits pointillés rouge sur la figure).



4. Section du pavé ABCDEFGH **par le plan** (MGN)**.**

La section du pavé par le plan (MGN) est donc le pentagone MIGJN.



Exercice(s) du livre : [Déclic] n° 29-30-32 p 274 (sections)

II) Vecteurs dans l'espace

Travail de l'élève **2.** ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de l'arête [FG].

1. Déterminer le point M tel que :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AM}$$

2. Démontrer que

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CB}$$

La notion de vecteur vue en géométrie plane se généralise sans difficulté à l'espace. Ainsi, on étend à l'espace la définition de vecteur dans un plan, et les opérations associées : multiplication par un réel, somme de vecteurs.
La relation de Chasles est toujours valable.

II.1. Vecteurs colinéaires, parallélisme et alignement

Propriété 2.

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** si et seulement si ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati)

Remarque : Cela signifie que les deux vecteurs ont la même direction, le même sens et la même longueur.

Définition 1.

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** lorsqu'ils ont la même direction.

Théorème 2.

Les vecteurs non nuls, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarque : Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.

Conséquences

La colinéarité est utile pour démontrer que :

- deux droites sont parallèles :

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires} \iff \text{les droites } (AB) \text{ et } (CD) \text{ sont parallèles.}$$

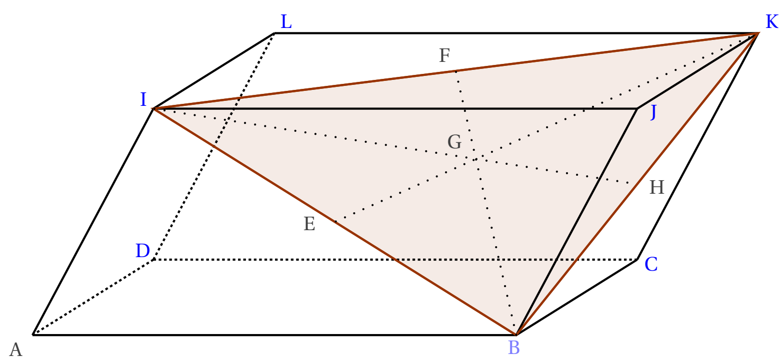
(On peut donc aussi en conclure que dans ce cas, les points A, B, C et D sont coplanaires)

- trois points sont alignés :

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires} \iff \text{si A, B et C sont alignés.}$$

Exemple :

ABCDIJKL est un parallélépipède. G est le centre de gravité du triangle BIK. Démontrer que J, D et G sont alignés.



Solution :

On constate que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{JD} &= \overrightarrow{JF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD} \\
&= \overrightarrow{JF} + 3\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{JL} \\
&= \overrightarrow{JF} + 3\overrightarrow{FG} + 2\overrightarrow{JF} \\
&= 3\overrightarrow{JF} + 3\overrightarrow{FG} \\
&= 3\overrightarrow{JG}
\end{aligned}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{JD}$ et $\overrightarrow{JF}$ sont colinéaires. Les points J, G, et D sont alignés.

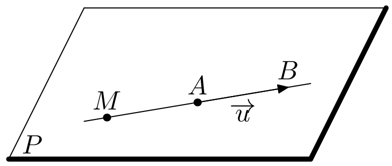
Exercice(s) du livre : Déclic : n° 39-40 p 276

II.2. Caractérisation vectorielle d'une droite et d'un plan de l'espace

Théorème 3.

On considère A et B deux points distincts de l'espace. La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont colinéaires i.e l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, t étant un réel quelconque.

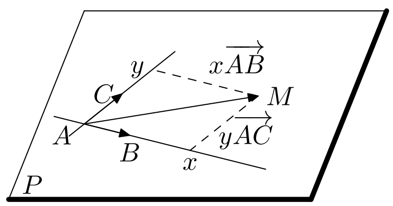
Remarque : On dit que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).



Théorème 4.

A, B et C sont trois ponts de l'espace non alignés.
Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace définis par

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad x \text{ et } y \text{ étant des réels quelconques}$$



Remarque : On dit alors que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont des vecteurs directeurs du plan (ABC)

Preuve

$\Rightarrow$ Montrons que si $\mathrm{M} \in (\mathrm{ABC})$ alors $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $\quad x$ et y étant des réels quelconques

Comme A, B et C ne sont pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires et forment une base du plan (ABC) et donc $(\mathrm{A}; \overrightarrow{\mathrm{AB}}; \overrightarrow{\mathrm{AC}})$ est un repère du plan (ABC). Par conséquent, si M est un point du plan (ABC) il existe un unique couple de réels tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\Leftarrow$ Montrons que si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $\quad x$ et y étant des réels quelconques alors $\mathrm{M} \in (\mathrm{ABC})$

Puisque, $(\mathrm{A}; \overrightarrow{\mathrm{AB}}; \overrightarrow{\mathrm{AC}})$ est un repère du plan (ABC), il existe dans ce plan un unique point N de coordonnées $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AN}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, d'où $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AN}} \Longleftrightarrow \mathrm{M} = \mathrm{N}$, on a donc

$$\mathrm{M} \in (\mathrm{ABC})$$

Exercice 9 : Démontrons par l'absurde le théorème du toit vu en seconde et rappeler cette année. On rappelle que l'on considère deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sécants selon une droite Δ. De plus, on sait qu'une droite d de $\mathscr{P}$ est parallèle

à une droite d' de $\mathscr{P}'$. Pour raisonner par l'absurde, on suppose de plus que Δ n'est pas parallèle à d et d'.
On désigne par $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ.

1. Expliquer pourquoi ce vecteur $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{P}'$.
2. Expliquer pourquoi il existe un vecteur $\vec{v}$ non nul directeur de d et d'.
3. Expliquer pourquoi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
4. Expliquer pourquoi ce vecteur $\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{P}'$.
5. En déduire une contradiction et conclure.

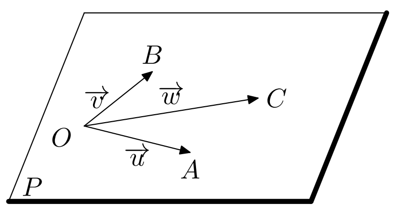
II.3. Décomposition de vecteurs

Travail de l'élève **3.** On considère un cube ABCDEFGH.

1. Les droites (AE), (CD) est (CH) sont-elles coplanaires ?
2. Pensez-vous que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CH}$ le soient ? Pourquoi ?
3. Peut-on exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction des $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CH}$? Dans l'affirmative, donner cette relation.
4. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont coplanaires.
5. Peut-on exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction des $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BC}$? Dans l'affirmative, donner cette relation.
6. Peut-on trouver trois vecteurs non coplanaires ? Deux vecteurs ? Si oui, donner un exemple.
7. Est-il possible de décomposer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$? Pourquoi ?

Définition 2.

Des vecteurs sont dits **coplanaires** lorsque l'on peut trouver des représentants de ces vecteurs situées dans un même plan.



Remarques :

- Deux vecteurs sont toujours coplanaires (car trois points le sont toujours).
- Attention, le fait qu'initialement les premiers représentants choisis ne soient pas dans un même plan n'empêche absolument pas les vecteurs d'être coplanaires. Cela signifie seulement que l'on n'a pas choisi les "bons" représentants. Par exemple, dans un cube, ABCDEFGH, les points A, B, C, G, et H ne sont pas coplanaires mais les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont coplanaires. Il suffit pour s'en apercevoir de changer de représentant pour le vecteur $\overrightarrow{GH}$ et prendre le vecteur $\overrightarrow{CD}$.
- En revanche, si on a utilisé 4 points seulement, pour écrire des représentants des trois vecteurs, les trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si les quatre points sont coplanaires.

Théorème 5.

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels x et y tels que :

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

Preuve

Choisissons un point M et considérons les points A, B et C tels que :

$$\overrightarrow{MA} = \vec{u} \qquad \overrightarrow{MB} = \vec{v} \qquad \overrightarrow{MC} = \vec{w}$$

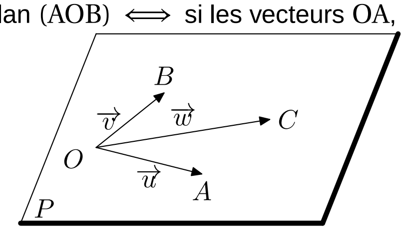
Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, ce sont des vecteurs directeurs du plan (MAB). Comme les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, il existe M tel que $C \in (MAB)$, ce qui est équivalent d'après le théorème précédent, au fait qu'il existe des réels a et b tels que :

$$\overrightarrow{MC} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} \Longleftrightarrow \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

Remarque : La notion de vecteurs coplanaires est importante pour prouver :

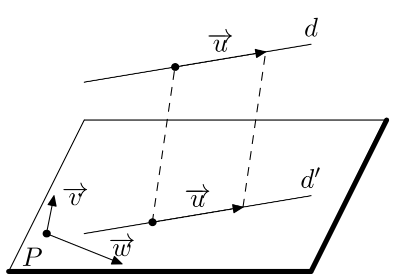
1. l'appartenance d'un point à un plan :

le point C appartient au plan (AOB) $\Longleftrightarrow$ si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont coplanaires



2. le parallélisme d'une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ et d'un plan P de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

la droite d est parallèle au plan P $\Longleftrightarrow$ les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.



Conséquences

- Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires
- Deux plans ayant un même couple de vecteurs directeurs sont parallèles (éventuellement confondus)
- Une droite $\mathscr{D}$ et un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est un vecteur du plan $\mathscr{P}$.

Exemple :

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de $[EB]$ et J le milieu de $[FG]$.
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.

Solution **:**

Il s'agit d'exprimer l'un des vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BG}$ ou $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des deux autres. Ceux qui sont sur les faces du cube sont simples à visualiser. Par conséquent, essayons d'exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BG}$.
Comme $\overrightarrow{BG}$ est la diagonale d'une face, exprimons-le plutôt en fonction de vecteurs sur des arêtes, et appuyons -nous sur le point F car il apparait dans $\overrightarrow{EF}$ (avec une figure, il semble assez tordu de s'appuyer sur E). On a :

$$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG}$$

Maintenant, considérons le vecteur $\overrightarrow{IJ}$, en s'appuyant sur le point F qui nous a déjà servi pour décomposer $\overrightarrow{BG}$. On a :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FJ}$$

Utilisons désormais les arêtes du cube, toujours en s'appuyant sur F. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} \\ &= \frac{1}{2}\text{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}\end{aligned}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.

Exercice 10 : ABCD est un tétraèdre. Le point I est le milieu de $[CD]$ et le point K est défini par $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

1. Faire une figure et placer K.
2. Exprimer $\overrightarrow{BI}$ puis $\overrightarrow{BK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
3. En déduire que les points B, K et I sont alignés.

Exercice 11 : ABCDEFGH est un cube. M et L sont les points tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{ML} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH}$
2. En déduire la position de la droite (ML) par rapport au plan (DBH)

Exercice 12 : ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[CD]$ et $[EF]$.

1. Démontrer que la droite (CK) est parallèle au plan (IJH)
2. Démontrer que les plans (IJH) et (BCK) sont parallèles

Exercice 13 : SABCD est une pyramide à base carré ABCD. Le point O est le centre de ABCD.
J est le milieu de $[SO]$. Le point K est tel que $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$

1. Justifier que S, B, D, O, J et K sont coplanaires.
2. **a.** Démontrer que $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$

b. Justifier que $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}\right)$ et en déduire que $\overrightarrow{BJ} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{SD}$

c. Montrer que B, J et K sont alignés.

3. Positions relatives de plans

a. Etudier la position relative du plan (BJC) avec le plan (ABC) et avec le plan (SCD).

b. Etudier la position relative des plans (BJC) et (SAD).

c. Construire la section de la pyramide SABCD par le plan (BJC). Ne pas justifier.

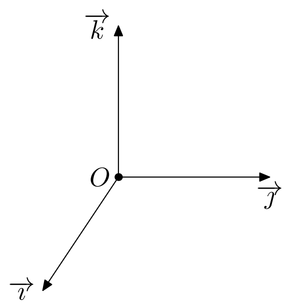
Exercice(s) du livre : Déclic : n° 50 à 56 p 277

III) Repérage dans l'espace

III.1. Repère de l'espace

Définition 3.

Soient trois points O, I, J non alignés et K un point n'appartenant pas au plan (OIJ), autrement dit, soient O, I, J et K quatre points non coplanaires.
On dit que $(O; \vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$ (où $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$, $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$) est un repère de l'espace.



Remarque :

1. Le triplet $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est appelé base des vecteurs de l'espace.
2. Si les droites (OI), (OJ) et (OK) sont deux à deux orthogonales et si $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$ on dit que le repère $(O; \vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$ est orthonormée

Exemple :

On considère un cube ABCDEFGH. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\left(A\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AE}\right)$ est un repère de l'espace
2. $\left(A\,;\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)$ est un repère de l'espace
3. $\left(B\,;\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BH}\right)$ est un repère de l'espace
4. $\left(A\,;\overrightarrow{ED}\,;\overrightarrow{HC}\,;\overrightarrow{EC}\right)$ est un repère de l'espace

III.2. Coordonnées d'un point, d'un vecteur

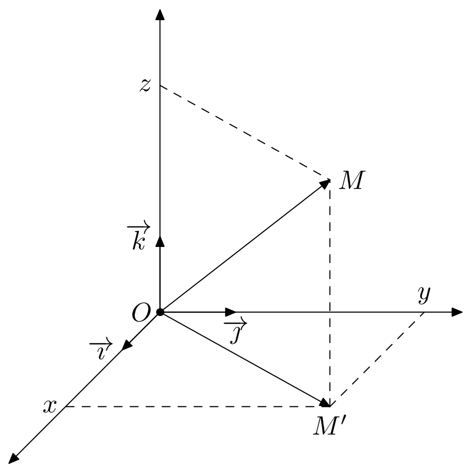
Théorème 6. (Définition)

Dans un repère $(\mathrm{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\,)$ de l'espace, pour tout point M il existe un unique triplet de nombres réels $(x; y; z)$ tel que

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

On appelle ce triplet les coordonnées de M, respectivement nommées *abscisse*, *ordonnée* et *côte* de M.

$(x; y; z)$ sont aussi les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. On écrit souvent : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



Preuve

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires donc le plan $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$ et la droite passant par M et dirigée par $\vec{k}$ ne sont pas parallèles. Considérons M' leur point d'intersection, M' est donc dans le plan $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$, donc il existe deux réels tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}'} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires, donc il existe un réel z tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = z\vec{k}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}'} + \overrightarrow{\mathrm{M}'\mathrm{M}}$$

ce qui donne :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

. Nous admettrons l'unicité de cette écriture.

Définition 4.

Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère de l'espace. Au vecteur $\vec{u}$ on associe le point M tel que : $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.
Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont alors les coordonnées du point M. Par conséquent, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière unique :

$$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

On note souvent $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

III.3. Calculs sur les coordonnées

Tous les résultats de la géométrie plane concernant les coordonnées s'étendent à l'espace par l'adjonction d'une troisème coordonnée.

Théorème 7.

Soit un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace.

⇝ Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors :

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}$$

⇝ Si deux points A et B ont pour coordonnées $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ alors : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$

– Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

– Si de plus C a pour coordonnées $C(x_C,y_C,z_C)$ alors le centre de gravité G du triangle ABC a pour coordonnées :

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$

Dans les deux cas, on fait la moyenne des coordonnées des points concernés.

Preuve

A titre d'exemple, voici une démonstration d'une des propriétés ci-dessus (toutes se démontrent de la même manière !!)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB} &= -\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\\ &= -x_A\vec{i}-y_A\vec{j}-z_A\vec{k}+x_B\vec{i}+y_B\vec{j}+z_B\vec{k}\\ &= (x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}\end{aligned}$$

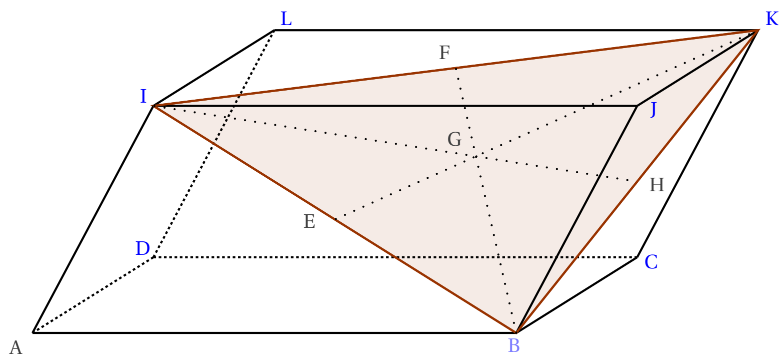
Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A\\ y_B-y_A\\ z_B-z_A\end{pmatrix}$

Exemple :

Un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ étant donné, on considère les points $A(1;2;-3)$, $B(-1;3;3)$ et $C(4;-1;2)$. D est un point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, calculer les coordonnées de D, puis celles du centre I de ce parallélogramme.

Exemple :

ABCDIJKL est un parallélépipède. G est le centre de gravité du triangle BIK. Démontrer, analytiquement, en choisissant un repère, que les points D, G et J sont alignés.



Exercice(s) du livre : Déclic : n° 61-62-67-72-73-74-75-76-77-78 p 279

III.4. Représentations paramétriques d'une droite, d'un plan

Propriété 3. (Définition)

Dans un repère de l'espace on considère une droite $\mathscr{D}$ passant par $\mathrm{A}\left(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A}\right)$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Un point $\mathrm{M}(x, y, z)$ appartient à $\mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = x_\mathrm{A} + at \\ y = y_\mathrm{A} + bt \\ z = z_\mathrm{A} + ct \end{cases}$

Ce système, lorsque t décrit $\mathbb{R}$ est appelé une **représentation paramétrique** de $\mathscr{D}$. Ainsi, $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points M vérifiant de coordonnées $\begin{cases} x = x_\mathrm{A} + at \\ y = y_\mathrm{A} + bt \\ z = z_\mathrm{A} + ct \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Remarques :

- ce système dépend du paramètre t, d'où le nom
- Une représentation paramétrique eset une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées d'un point permettant d'affirmer que ce point appartient à la droite ou qu'il n'y appartient pas.
- Une droite admet une infinité de représentations paramétriques, il suffit de choisir un autre point, ou un autre vecteur directeur pour en avoir une différente.

Preuve

On sait déjà que $\mathrm{M} \in \mathscr{D} \iff \vec{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ sont colinéaires.
Ce qui équivaut à dire qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\vec{u}$. Or

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\vec{u} \iff \begin{pmatrix} x - x_\mathrm{A} \\ y - y_\mathrm{A} \\ z - z_\mathrm{A} \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = x_\mathrm{A} + at \\ y = y_\mathrm{A} + bt \\ z = z_\mathrm{A} + ct \end{cases}$$

Exemple :

$\begin{cases} x = 4-5t \\ y = -2+2t \\ z = 1+3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite d passant par le point $A(4;-2;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Le point obtenu en prenant $t = 0$ est le point A.

Celui en prenant $t = -1$ eset $B(9;-4;-2)$. Il appartient à la droite d et on a $\overrightarrow{AB} = -\vec{u}$.

Soit le point $C(-6;2;7)$. Pour savoir s'il appartient à la droite d, on cherche t tel que l'on ait : $\begin{cases} x = 4-5t \\ y = -2+2t \\ z = 1+3t \end{cases}$

On constate que ce système a pour solution $t = 2$. Donc $C \in d$ et on a $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$.

Propriété 4.

Dans l'espace muni d'un repère, on considère un plan $\mathscr{P}$ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$. En raisonnant de même que pour une droite, on peut dire qu'un point M appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v} \iff \begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases}$

Ce système, lorsque t et t' décrivent $\mathbb{R}$, est appelé représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$

Exemple :

Déclic : n° 82 p 281

Exercice 14 : Dans un repère de l'espace, on considère les points $E(2;-3;5)$, $F(0;-1;1)$, $H(1;-8;8)$ et la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 4-t \\ z = -2+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que d et (EF) sont strictement parallèles.
2. Montrer que d et (EH) sont sécantes et préciser leur point d'intersection K.

Exercice(s) du livre : Déclic : n° 80-81-83-84-87 p 281
Objectif bac : n° 93-94-95 p 284 ...