Chapitre 12

Nul n'est censé ignorer les lois continues

Hors Sujet

Titre : « Laurence Anyways »
Auteur : Xavier Dolan
Présentation succinte : Laurence Anyways est un film franco-québécois, un mélodrame, écrit et réalisé par Xavier Dolan, sorti en 2012.
Le film a reçu le prix de meilleur film canadien au festival international du film de Toronto et le grand prix au festival du film de Cabourg, ainsi que le Prix collégial du cinéma québécois en 2013. C'est l'histoire d'un impossible amour entre un homme et une femme après que celui-ci ait décidé de changer de sexe dans les années 90.
Le jour de ses trente ans, Laurence annonce à Fred qu'il veut devenir une femme et lui demande de l'accompagner dans sa transformation. Pour Fred, c'est un coup de tonnerre, mais elle décide malgré tout de donner une chance à leur couple.
Face aux jugements et à l'incompréhension, Laurence et Fred vont tout faire pour préserver leur amour hors du commun.

Xavier Dolan, né le 20 mars 1989 à Montréal,se fait connaître en tant que scénariste et réalisateur lors de la projection de son premier long métrage : « J'ai tué ma mère » à la 41e Quinzaine des réalisateurs, au cours de la 62e édition du Festival de Cannes. Il y gagne trois prix et les trois jurys soulignent le caractère unique de sa réalisation, la vérité, la violence et la poésie de la langue, ainsi que l'acharnement du jeune cinéaste et la foi en ses projets.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

⇝ blabla

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

NUL N'EST CENSÉ IGNORER LES LOIS CONTINUES

Résumé

Si une variable aléatoire X prend un nombre de valeurs fini ou dénombrable (son ensemble de définition est inclus dans N), on parle de variable discrète. C'est le seule cas que vous avez étudié jusqu'à présent.
Mais il existe des variables aléatoires non discrètes, qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle réel (borné ou non). Par exemple, le temps d'attente d'un bus, la durée de vie d'un appareil, la distance d'un point d'impact au centre d'une cible.... Dans ce cas, on dit alors que la variable est continue. Il ne s'agira alors plus de calculer une probabilité d'apparition d'une valeur donnée mais d'un intervalle. On s'intéressera donc à des événements du type X entre les réels a et b, $X \geq a$ ou encore $X \leq b$. Daniel Bernoulli fut un pionnier en la matière.
Vous constaterez dans ce chapitre que ce chapitre mobilisera vos connaissances acquises dans le chapire sur l'intégration, ce qui sera un bon moyen pour vous de réviser si vous n'êtes pas encore au point.

Les probabilités continues permettent de modéliser des phénomènes extrêmement différents. Elles apparaissent au même moment que les probabilités modernes, autour de mathématiciens comme Abraham De Moivre (1667-1754). Mais c'et Gauss (1777-1855) qui donne son nom à la courbe liée à la loi normale et qui la relie en particulier au problème des observations astronomiques.
Les lois continues se sont multipliées depuis (loi exponentielle, loi de Weibull, loi de Pareto ...), ouvrant un champs immense d'applications et de recherches ...

I) Loi à densité sur un intervalle borné

I.1. Du discret au continu : la loi uniforme

Travail de l'élève 1 : Un curseur se positionne au hasard entre les abscisses a et b. On note X son abscisse.

Cette expérience revient à choisir au hasard un réel de l'intervalle $[a;b]$.
On admet que les réels sont uniformément répartis et donc que les issues sont équiprobables.
On cherche à modéliser cette expérience (univers et loi de probabilité associée).

1. Préciser l'univers Ω de cette expérience.
   En quoi se distingue-t-il des univers déjà rencontrés ?
2. Rappeler ce que signifie « définir une loi de probabilité » lorsque Ω est un ensemble fini.
3. Voyons si cette approche « point par point » est généralisable ici.
   a. Lequel des événements suivants vous paraît le plus probable :

   X est le milieu de $[a;b]$, $X = 1$, $X = 0$ ou $X = 3$?

   b. Conjecturer une probabilité à leur associer.

c. Démonstration : Supposons que la probabilité d'obtenir n'importe quel nombre c de l'intervalle $[a;b]$ soit non nulle et notons $P(X=c)=p>0$.
On considère un ensemble E_n de n nombres réels de l'intervalle $[a;b]$.
   i. Exprimer $P(X \in E_n)$ en fonction de p et n.
   On suppose toujours valable le principe selon lequel la probabilité d'une réunion d'événements disjoints est la somme des probabilités de ces événements.
   ii. Montrer que pour n suffisamment grand, on a $P(E_n)>1$
   iii. Que pouvez-vous en déduire sur p ?

d. Conclure.

4. **a.** On découpe l'intervalle $[a;b]$ en quatre sous-intervalles de même amplitude.
Quelle est que la probabilité que le curseur s'arrête dans le quart supérieur ?

b. Quelle est la probabilité que le curseur s'arrête dans l'intervalle $[0;1]$? et dans l'intervalle $]0;1[$?

c. Déterminer de même $P(X \in [0.45;0.55])$, $P(3 \leq X \leq 4])$ et $P(-3 \leq X \leq 3]$?

d. Soit c et d deux réels de l'intervalle $[a;b]$.
En généralisant votre raisonnement, proposer des probabilités pour $P(X \in [c;d])$, $P(X \in]c;d])$, $P(X \leq c)$, $P(X > c)$.

Définition 1.

Lorsqu'une variable aléatoire peut prendre toutes ses valeurs dans un ensemble dénombrable, on dit qu'elle est **discrète**.
Lorsqu'une variable aléatoire peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non), on dit qu'elle est **continue**.

Exemples :
Le temps d'attente d'un bus, la durée de vie d'un appareil, la distance d'un point d'impact au centre d'une cible....

Remarques :

- Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a $P(X=c)=0$, que la valeur c soit dans l'intervalle des valeurs possibles pour X ou non.
Ainsi, on s'intéressera à des événements du type X entre les réels a et b, $X \geq a$ ou encore $X \leq b$.
- Dans l'activité précédente, la probabilité d'obtenir 1 et celle d'obtenir 3 sont toutes les deux nulles. Pourtant, la probabilité d'obtenir un nombre voisin de 1 ne l'est pas, et celle d'un nombre voisin de 3 si. On appelle **densité de probabilité** une certaine fonction qui donne plus ou moins de « poids » à la probabilité d'un intervalle donné.
L'objectif du chapitre est de déterminer des probabilités d'intervalles en fonction de cette densité.

Définition 2. (Proposition)

On appelle **loi uniforme** sur $I=[a;b]$, la loi de probabilité qui modélise le choix aléatoire d'un nombre réel X de l'intervalle I, tous les nombres ayant le même poids.
Pour tout sous-intervalle de I du type $[c;d]$ on a :

$$P\big(X \in [c;d]\big)=\frac{d-c}{b-a}$$

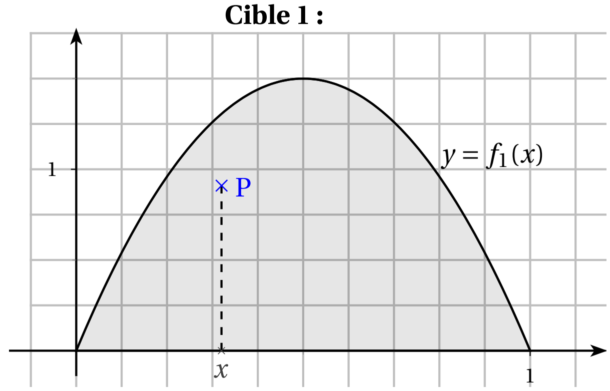
Remarque : La probabilité d'un intervalle $J \subset I$ est proprotionnelle à sa taille.

I.2. Densité d'une loi de probabilité

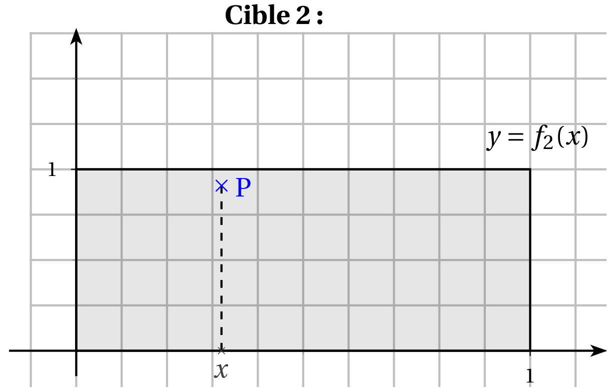
Travail de l'élève 2 :

A ces heures perdues, Loïc s'amuse à lancer des flèchettes sur des cibles originales, dont la forme est donnée dans chaque cas par le domaine de plan coloré, situé au-dessus du segment représentant l'intervalle $[0;1]$.
Les trois cibles ont la même aire totale.
Loïc ne râte jamais sa cible, mais sa fléchette peut tout de même se planter aléatoirement dessus.
On appelle x l'abscisse du point d'impact P.
Pour un intervalle J inclus dans $[0,1]$, on étudie ci-dessous la probabilité de l'événement $\{x \in \mathrm{J}\}$ pour chaque cible.

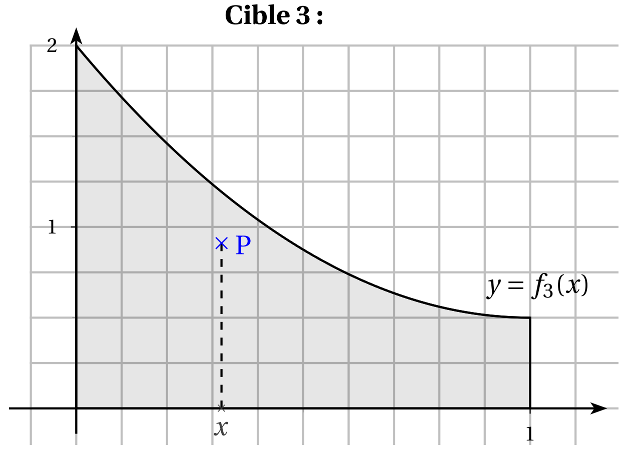
Cible 1 :



Cible 2 :



Cible 3 :



1. Quel lien peut-on faire avec l'activité précédente ?
2. Loïc gagne lorsque x appartient à l'intervalle $[0;0.2]$.
   - **a.** Avec quel cible a-t-il apparemment le plus de chance de gagner ?
   - **b.** Par lecture graphique, conjecturer la valeur exacte de la probabilité p_2 de gagner avec la cible 2.
   - **c.** Proposer un principe de calcul pour les probabilité p_1 et p_3 de gagner avec les cibles 1 et 3.
3. Le bord supérieur du domaine est, pour chaque cible, la courbe représentative d'une fonction f_i dont on donne l'expression :

$$f_1 : x \longmapsto 6x(1-x) \qquad ; \qquad f_2 : x \longmapsto 1$$

$$\text{et } f_3 : x \longmapsto \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}$$

   - **a.** Vérifier que chacune des cibles a une aire totale égale à 1 unité d'aire.
   - **b.** Calculer les probabilités p_1 et p_3.
   - **c.** Déterminer par le calcul la probabilité de l'événement $\{0.3 \leq x \leq 0.7\}$ pour chacune des trois cibles.

Définition 3. (Proposition)

Une densité de probabilité sur un intervalle borné $\mathrm{I} = [a;b]$ de $\mathbb{R}$ est une fonction f **continue**, **positive** sur I et qui vérifie

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = 1}$$

On définit une **loi de probabilité** P sur l'intervalle I, modélisant le choix d'un réel x dans I, en associant à tout intervalle J d'extrémités c et d, avec $a \leq c \leq d \leq b$, la probabilité :

$$\mathrm{P}\big(x \in \mathrm{J}\big) = \int_c^d f(t)\,dt$$

On dit que f est la **densité** f de cette loi sur I.

Preuve

Grâce aux propriétés de l'intégrale, on retrouve les trois règles de définitions d'une probabilité :

1. P à valeurs dans $[0;1]$
2. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$
3. $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B})$ pour tous événements A et B disjoints.

Remarques :

- Pour tout réel $c \in \mathrm{I}$ on a $\mathrm{P}\big(x = c\big) = \int_c^c f(t)dt = 0$.
  La probabilité que le nombre choisi soit exactement c est nulle.
  On a donc bien $\mathrm{P}\big(c \leq x \leq d\big) = \mathrm{P}\big(c < x < d\big) = \mathrm{P}\big(c < x \leq d\big) = \ldots$
- On peut démontrer grâce aux propriétés de l'intégrales que pour tout événement A on a $\mathrm{P}\big(\overline{\mathrm{A}}\big) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})$, ou encore que $\mathrm{P}(x > c) = 1 - \mathrm{P}(x \leq c)$
- On définit l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi de probabilité de densité f sur I par :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_a^b t f(t)dt \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\Big(\big(\mathrm{X} - \mathrm{E}(x)\big)^2\Big) = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - \mathrm{E}^2(\mathrm{X})$$

- On définit la probabilité conditionnelle de la même manière que dans le cas discret, ainsi que l'indépendance.

Exemples :

1. Soit f une fonction constante sur un intervalle $[-1;3]$.
   - Quelle doit être sa valeur pour que f soit une densité sur cet intervalle ?
     La loi associée à cette densité s'appelle **la loi uniforme sur** $[-1;3]$. Nous l'avons déjà rencontrée dans l'activité 1.
   - Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[-1;3]$. Calculer $P(0 \leq X \leq 0.25)$ puis $P(a \leq X \leq b)$ pour tout $a \leq b$ appartenant à I.
   - Calculer l'espérance de X.
2. Un entrepôt accueille tous les matins des camions de livraison sur un créneau de deux heures d'ouverture, de 7h30 à 9h30. On s'intéresse à l'heure d'arrivée T d'un camion qui se présente tous les matins à l'entrepôt aux heures d'ouverture.
   On admet que T suit la loi de probabilité de densité $f : x \longmapsto |x - 8.5|$ sur l'intervalle $[7.5;9.5]$.
   - Vérifier que la fonction f est une densité de probabilité sur $[7.5;9.5]$.
   - Calculer la probabilité d'arrivée du camion entre 9h00 et 9h30.
   - En déduire la probabilité que le camion arrive avant 9h00.
   - Calculer la probabilité d'arrivée du camion entre 8h00 et 9h00.
   - Calculer l'espérance de la variable T.
   - Vérifier graphiquement vos résultats sur un dessin.

Remarques :

- On étend la définition d'une densité à un intervalle I non borné ainsi :
  – Si I est du type $[a;+\infty[$ alors on doit avoir $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,dt = 1$.
    La définition est analogue dans le cas $]-\infty;a]$
  – Si $I = \mathbb{R}$ alors on doit avoir $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^0 f(t)\,dt + \lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt = 1$ si les limites individuelles existent.
- La définition de la loi de probabilité P s'étend à des intervalles $J \subset I$ non bornés lorsque la limite existe.

Exemple :

1. Démontrer que la fonction f définie sur sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 3\exp^{-3t}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^+$.
   La loi associée à cette densité s'appelle **la loi exponentielle de paramètre 3**.
2. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 3 sur $\mathbb{R}^+$.
   Calculer $P(0 \leq X \leq 0.25)$ puis $P(0 \leq X \leq t)$ pour tout t positif.
3. En déduire $P(X \geq t)$.

II) Deux exemples de lois continues

II.1. La loi uniforme sur $[a;b]$

Propriété 1.

La **loi uniforme sur** $[a,b]$ est la loi de probabilité dont la densité est la fonction constante f définie sur $[a,b]$ par

$$f(t)=\frac{1}{b-a}$$

L'espérance de la loi uniforme sur $[a;b]$ est :

$$\mathrm{E}=\int_a^b t\times\frac{1}{b-a}dt=\frac{a+b}{2}$$

Preuve

Pour tous c , d tels que $a\leq c\leq d\leq b$, on cherche la fonction constante (continue et positive) f telle que $\displaystyle\int_c^d f(t)dt=\frac{d-c}{b-a}$.

Or comme f est constante, on a $f(x)=k$, $\forall x\in\mathbb{R}$ et on sait que $\displaystyle\int_c^d f(t)dt=[kt]_a^b=k(d-c)$.

Par conséquent, $k=\dfrac{1}{b-a}$.

De plus $\displaystyle \mathrm{E}=\int_a^b t\times\frac{1}{b-a}dt=\left[\frac{1}{2(b-a)}\times t^2\right]_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$

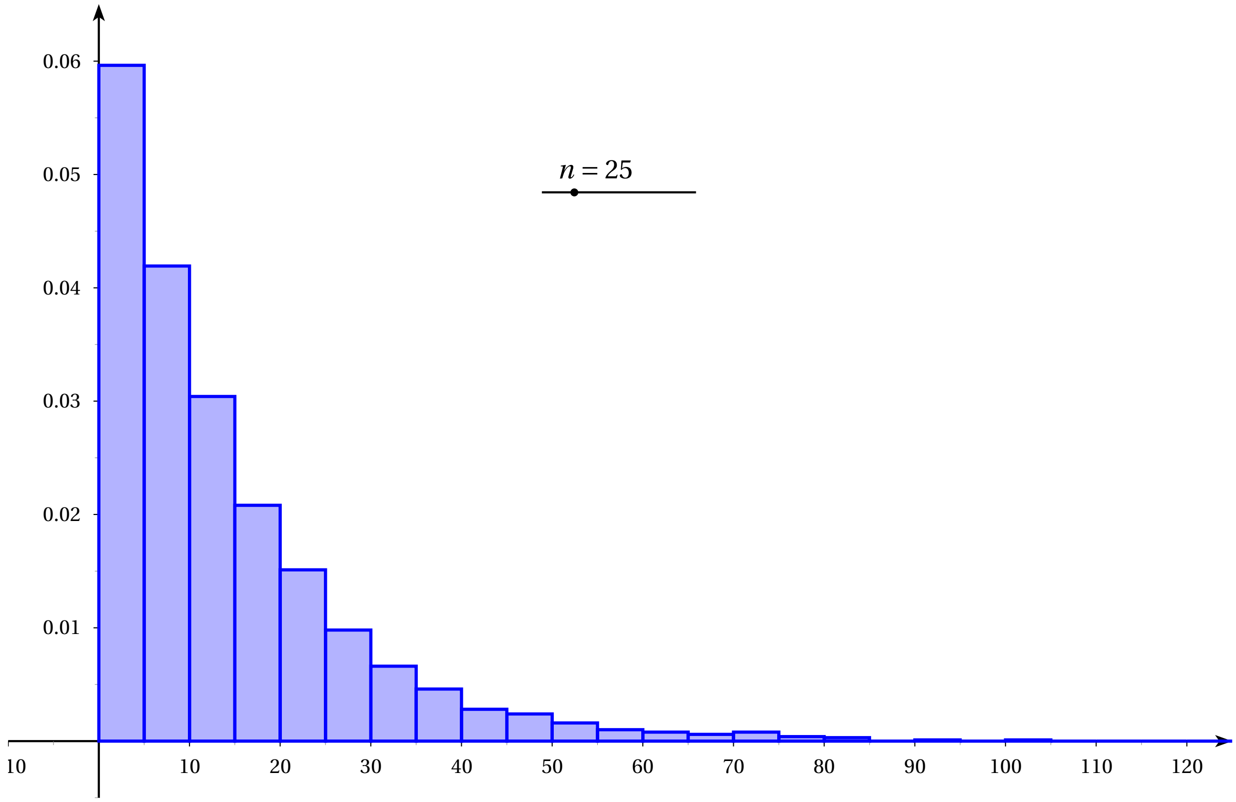
Exemple :

Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à la station n°14.
Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0;6]$.
Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?

II.2. La loi exponentielle de paramètre λ

Travail de l'élève 3 : On considère un matériel électronique dont le temps de fonctionnement exprimé en semestres, est modélisé par une variable aléatoire T prenant ses valeurs dans $[0;+\infty[$.

1. **Simulation :**
   On a visualisé sur Géogébra 5000 temps de fonctionnement de ce matériel.
   Pour visualiser les données, on les a regroupées en n classes.



Le diagramme ci-dessus donne l'histogramme associé à un échantillon de taille 5000, de valeur maximale 125, après regroupement en 25 classes d'amplitude 5.

a. Estimer $P(T \leq 15)$ et $P(5 \leq T \leq 15)$.

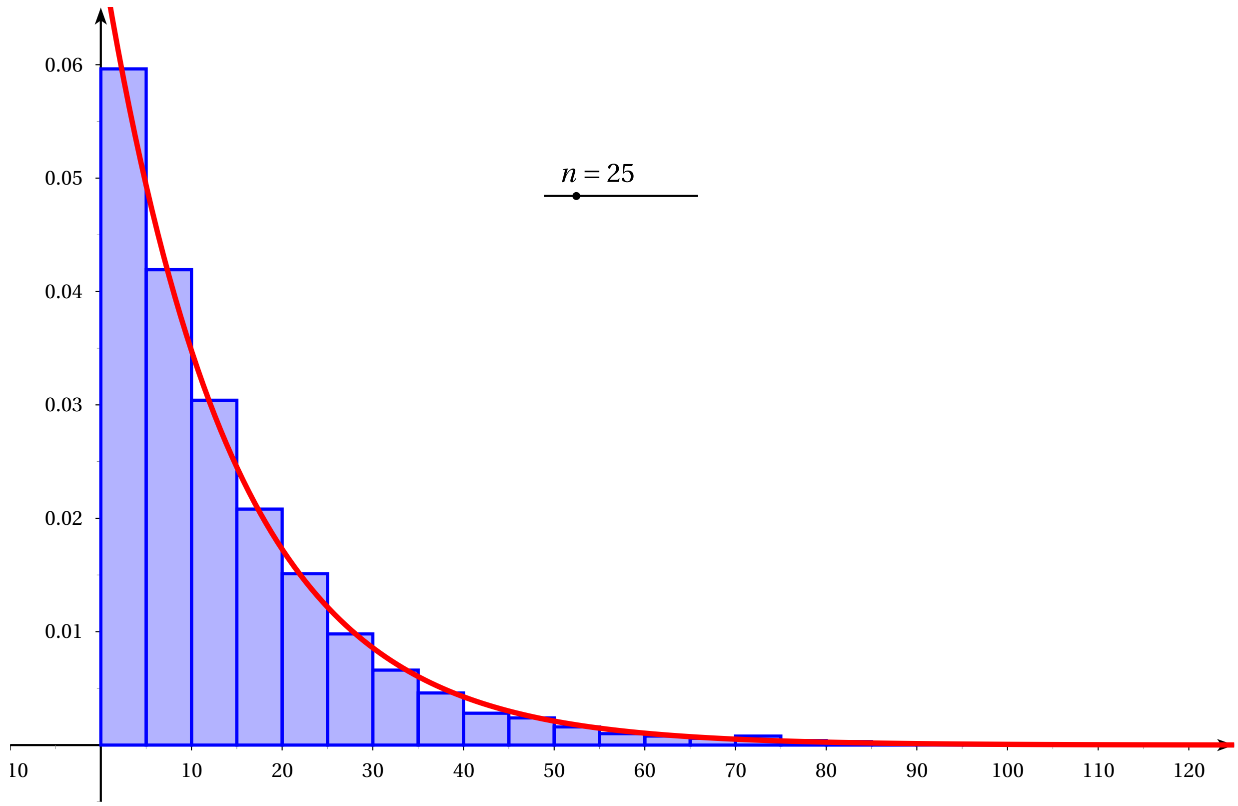
b. Estimer la valeur t_0 telle que $P(T \leq t_0) = 0.5$.
*On appelle t_0 **le temps de demi-vie** d'un tel appareil*

c. L'allure du diagramme rappelle un type de fonction continue. Lequel ?

2. Courbe de densité et calculs d'aires

On introduit la courbe de densité $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie pour $x \geq 0$ par $f(x) = 0.07e^{-0.07x}$.

Pour tout réel t positif, on note $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)dx$.



a. Pour tout t positif, calculer $F(t)$ et vérifier que f est bien une fonction densité sur $[0;+\infty[$. Interpréter graphiquement.

b. Calculer $F(15)$ et comparer avec l'estimation de $P(T \leq 15)$ effectuée à la question 1a). Expliquant en donnant une interprétation graphique de $F(15)$.

c. A quelle intégrale peut-on comparer $P(5 \leq T \leq 15)$? Faire cette comparaison.

d. Calculer $P(T \geq 10)$ puis $P_{(T\geq 5)}(T \geq 15)$.
Comparer et commenter les résultats obtenus.

e. Résoudre l'équation $F(t) = 0.5$ et comparer avec l'estimation de t_0, effectuée à la question 1b).

Définition 4.

Soit λ un réel strictement positif. On appelle **loi exponentielle de paramètre** λ la loi de probabilité dont la densité est la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Propriété 2.

Soit T est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $a \geq 0$ on a :

- $\rightsquigarrow$ $P(T \leq a) = P(T < a) = 1 - e^{-\lambda a}$
- $\rightsquigarrow$ $P(T \geq a) = P(T > a) = e^{-\lambda a}$
- $\rightsquigarrow$ $E(T) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t f(t)\,dt = \dfrac{1}{\lambda}$

Preuve

⇝ Pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ on a $P(T \leq a) = P(T < a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^a = -e^{-\lambda a} + e^{-\lambda 0} 1 - e^{-\lambda a}$

⇝ $P(T \geq a) = P(T > a) = 1 - P(T \leq a) = e^{-\lambda a}$

⇝ **Type ROC :**

1. Montrer qu'il existe deux réels c et d (en les déterminant) tels que la fonction

$$G : t \longmapsto (cx + d)e^{-\lambda t}$$

soit une primitive sur $[0; +\infty[$ de la fonction $g : x \longmapsto t \times \lambda e^{-\lambda t}$.

2. En déduire pour tout x, la valeur de l'intégrale $\int_0^x t f(t) dt$.
3. Déterminer alors $E(T)$.

Exemple :

On suppose que la durée de vie X d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre 0.1.

1. Calculer la probabilité qu'une voiture dure entre 5 et 8 ans.
2. Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie.
3. On sait qu'une voiture a duré déjà 10 ans.
Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?
4. Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse deux ans.
*On constate que la probabilité que la voiture dure deux ans de plus ne dépend pas de son âge. On dit que X est une loi de durée de vie **sans vieillissement**.*

Propriété 3.

Soit T est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Pour tous réels t et h strictement positifs, on a :

$$P_{(T \geq t)}(T \geq t + h) = P(T \geq h)$$

Preuve

Pour tous réels positifs t et h on a $P(T \geq t + h) = e^{-\lambda(t+h)}$ et $P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$.

On a $P_{(T \geq t)}(T \geq t + h) = \dfrac{P\big((T \geq t) \cap (T \geq t + h)\big)}{P(T \geq t)} = \dfrac{P\big(T \geq t + h\big)}{P(T \geq t)} = \dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(T \geq h)$

Remarque : Cette propriété s'appelle « durée de vie sans vieillissement », car elle montre que la durée de vie T sur un laps de temps h, ne dépend par de l'âge t à partir duquel on considère cet événement.
On parle de **loi sans mémoire**.
Les lois exponentielles modélisent des phénomènes dont la durée de vie n'est pas affectée par l'âge, comme par exemple celle d'un atome radioactif, ou celle de certaines tribus (dont les maladies et autres n'entraînent que des morts non dues à l'âge des personnes), etc

III) Approximation de la loi binomiale centrée réduite par une loi continue

III.1. Standardiser des variables aléatoires

Travail de l'élève 4 : Loïc est un producteur de foies gras réputé du Sud-Ouest.
En 2011, ses foies gras commercialisés ont eu un poids moyen de 680 grammes, et un écart-type de 120 grammes.
En 2012, ses foies gras commercialisés avaient un poids moyen de 750 g et un écart-type de 100 g.
Jérôme, un client fidèle, a acheté un foie gras de 750g en 2011 et un foie gras de 800g en 2012. Quel classement peut-on faire de ces deux foies, comparativement à la production annuelle dont il sont issus ?

Conclusion

Les distributions de probabilité de deux variables aléatoires peuvent être très différentes, notamment en raison de la disparité de leur espérance ou de leur écart-type.
En centrant et en réduisant les variables, on les rend indépendantes de l'unité choisie pour leurs valeurs, avec une espérance et un écart-type de standardisés de 0 et 1.
La comparaison de plusieurs variables aléatoires s'en trouve ainsi facilitée.

III.2. Théorème de Moivre-Laplace

Travail de l'élève 5 :

Objectifs : Les lois de probabilité discrètes donnant lieu à des calculs fastidieux dans certaines situations, on cherche à approcher les résultats par ceux de calculs effectués avec des variables aléatoires continues à densité. Dans le cadre des programmes de Terminale, ce problème est traité pour les lois binomiales.Mais découvrons cela sur un exemple.

En Syldavie, la proportion de personnes pratiquant la danse sous-marine en scaphandre est $p = 0.35$.
On prélève au hasard un échantillon de taille n dans cette population (celle-ci étant assez grande pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise).

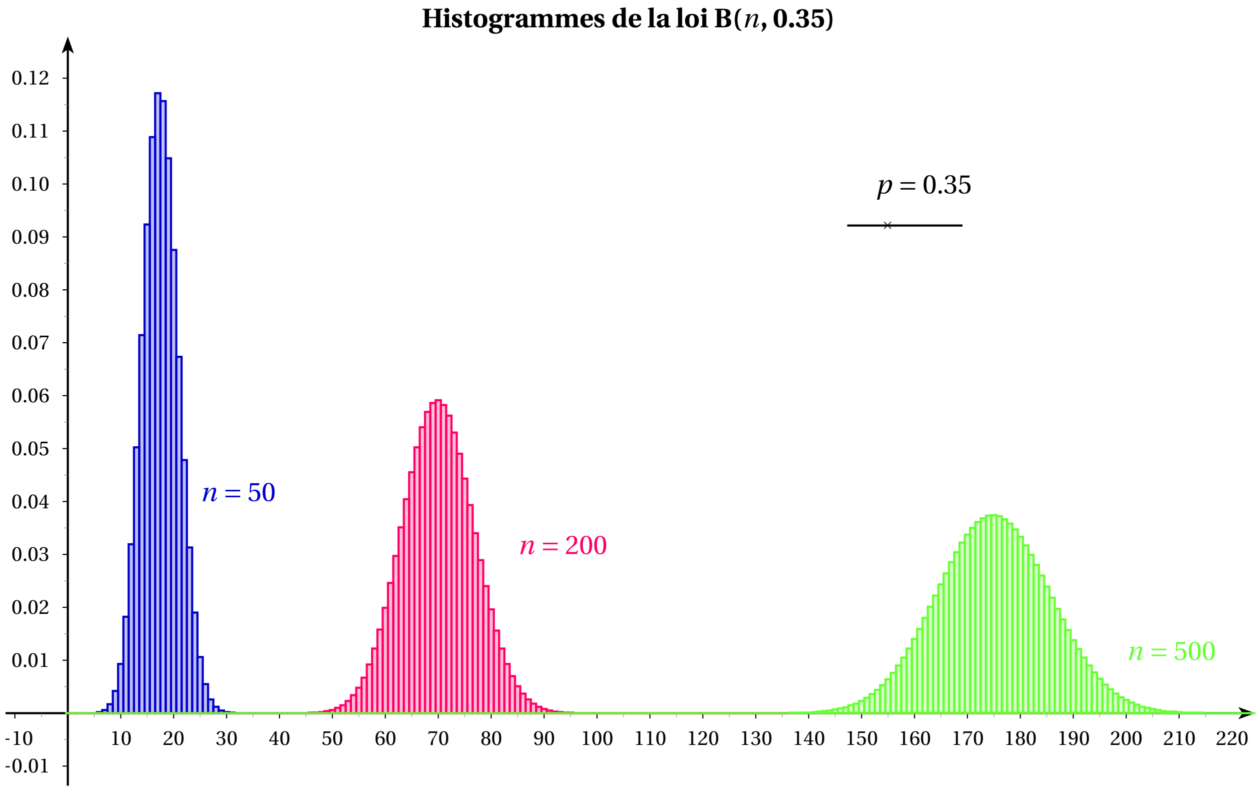
PARTIE A. Histogramme normalisé de la loi binomiale

On désigne par X la variable aléatoire associant à un échantillon de taille n le nombre de syldaves de l'échantillon pratiquant la danse sous-marine en scaphandre.

1. **a.** Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b. Déterminer en fonction de n, l'espérance μ et l'écart-type σ de X.

   c. On a représenté les histogrammes de la loi $B(n, 0.35)$ pour trois valeurs de n différentes.
   Que se passe-t-il lorsque n varie ?
   Quand n varie, on obtient des histogrammes qui diffèrent par leurs positions et par leurs dispersions.
   Quelle est la somme des aires des rectangles pour un n donné ?



On rappelle qu'un histogramme est différent d'un diagramme en bâtons en général.
En effet :

⇝ *Dans un diagramme en bâtons, on représente les probabilités de chaque valeur possible pour* X *par* ***une hauteur de bâton****.*

⇝ *Dans un histogramme, on représente les probabilités de chaque valeur possible pour* X *par* ***une aire de rectangle*** *: l'aire de chaque rectangle centré autour d'une valeur k vaut* $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$.

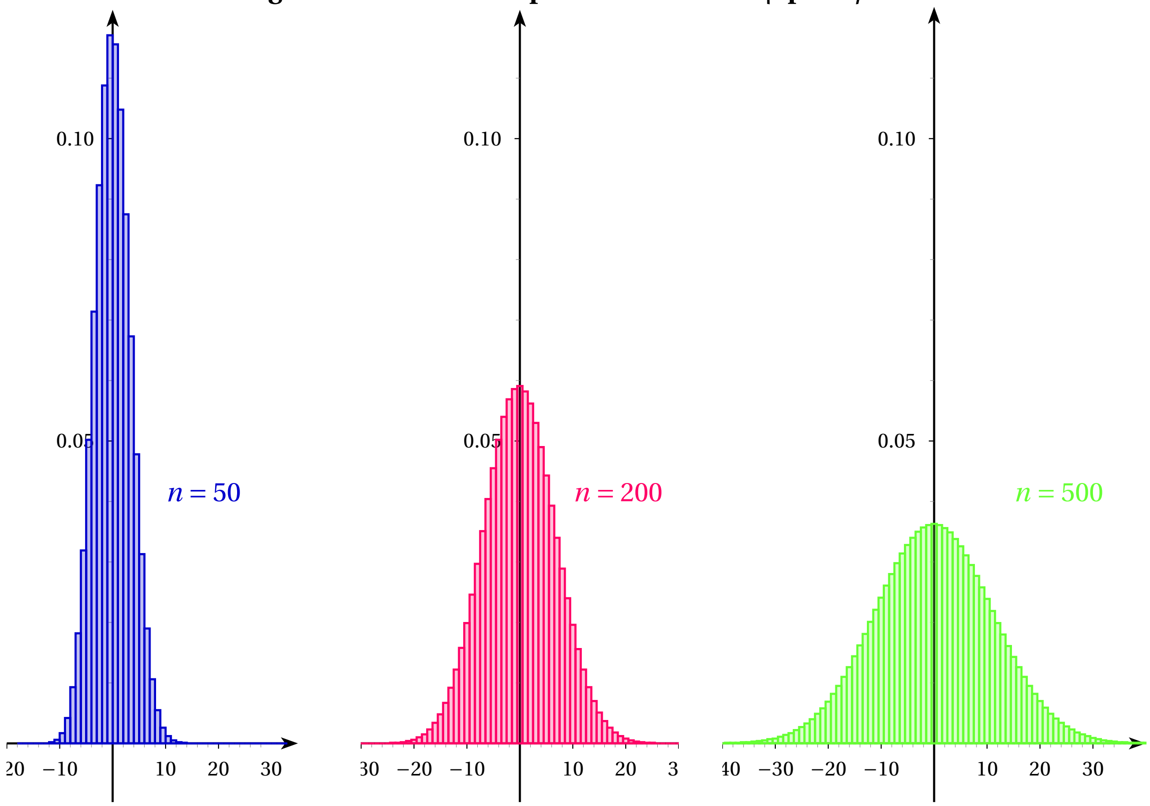
Pour une loi binomiale classique, bâton ou rectangle, cela ne change rien, puisque chaque rectangle a une largeur de 1*. Donc son aire vaut* $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$ *si et seulement si sa hauteur vaut* $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$.
On utilise tout de même les histogrammes, car notre objectif est d'approcher la loi binomiale par une loi continue, dans laquelle les probabilités sont représentées graphiquement par des aires.

2. Pour réduire cette variabilité, stabilisons dans un premier temps la position de l'histogramme en considérant la variable aléatoire $\mathrm{Y} = \mathrm{X} - \mu$.

a. Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{Y})$ et $\sigma(\mathrm{Y})$.
Pour cette raison on dit que la variable Y **est <u>centrée</u>.**

b. On a représenté les histogrammes de la loi de Y pour trois valeurs de n différentes.
Expliquer.
Valeurs prises par Y **? écart entre deux valeurs consécutives de** y **? hauteur des rectangles : P(X=k)= P(Y=y) pr un** $y = k - \mu$
Que se passe-t-il lorsque n varie ?
On constate que dans n **varie, la position de la courbe ne varie plus, par contre elle « s'écrase » plus ou moins en fonction de** n**.**
Quelle est la somme des aires des rectangles pour un n donné ?

Histogrammes de la loi de probabilité $Y = X - \mu$ **pour** $p = 0.35$



3. Reste donc la variabilité de la dispersion à stabiliser. Considérons pour cela la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

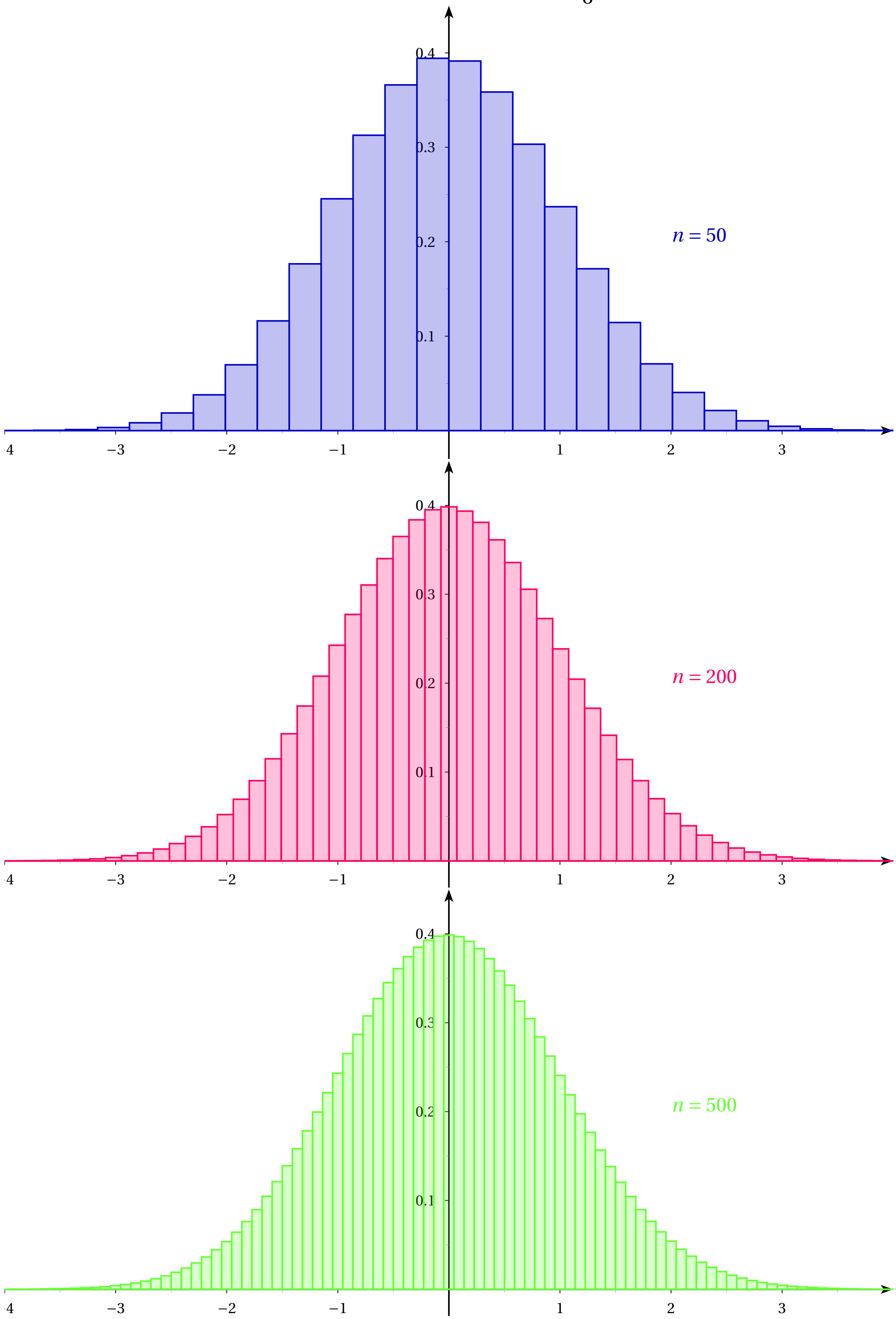
4. Calculer $E(Z)$ et $\sigma(Z)$.
Pour cette raison on dit que la variable Z **est** **<u>centrée réduite</u>.**

5. Compléter le tableau suivant :

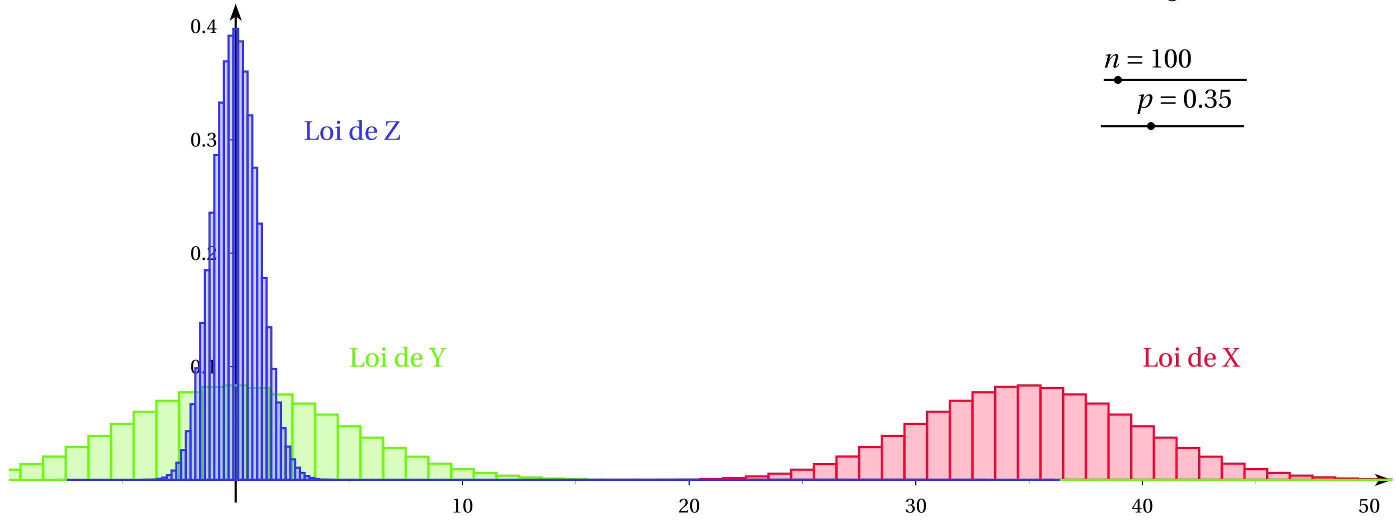
Valeurs k prises par X	0	1	2	…	k	…	n
Valeurs z prises par Z							
$P(Z = z)$ en fonction de $P(X = k)$							

6. On a représenté les histogrammes de la loi de Z pour trois valeurs de n différentes.
Expliquer.
Valeurs prises par Z **? écart entre deux valeurs consécutives de** z **:** $1/\sigma$**, hauteur des rectangles :** $P(X = k) = P(Z = z)$ **pr un** $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$
Que se passe-t-il lorsque n varie ?
On constate que désormais quand n **varie, l'allure des histogrammes change peu. On peut même dire que lorsque** n **devient grand, on aurait envie de l'approcher par la courbe d'une fonction continue.**
Quelle est la somme des aires des rectangles pour un n donné ?

Histogrammes des lois de probabilité de $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ **pour** $p = 0.35$



Résumé : Histogrammes des lois de probabilité de $X \hookrightarrow B(100, 0.35)$**,** $Y = X - \mu$ **et** $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

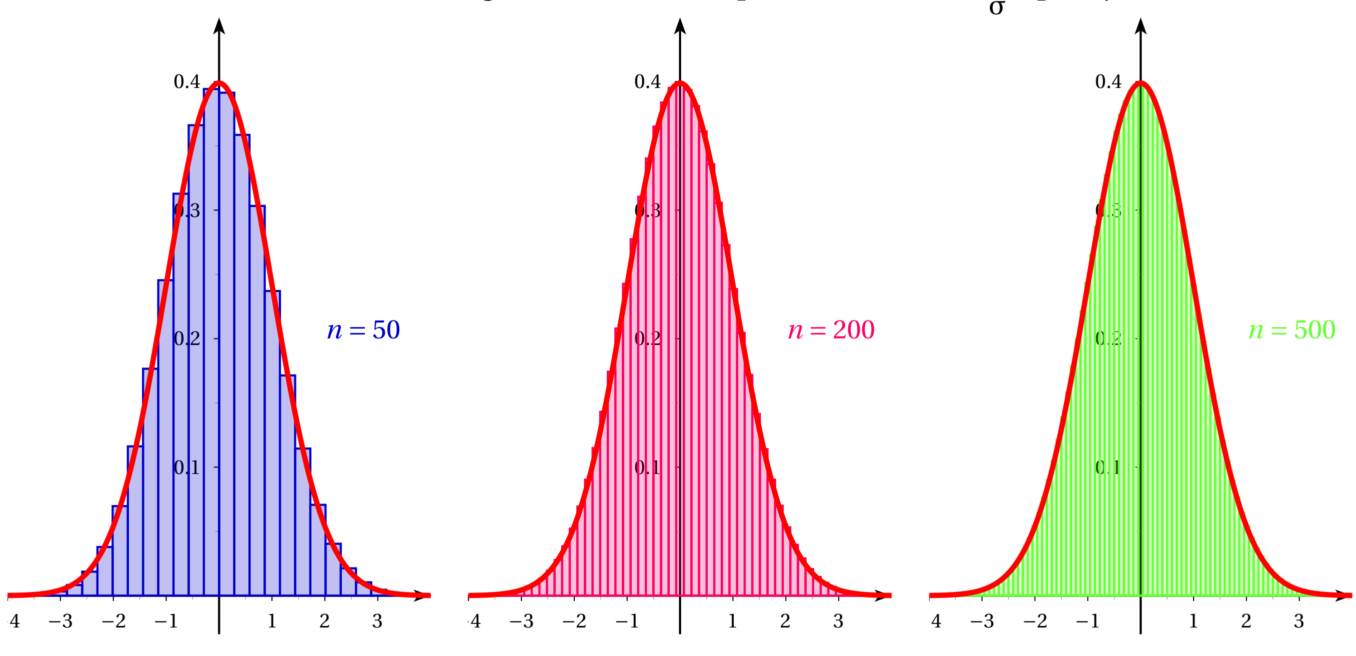


PARTIE B. **Courbe de Gauss et loi normale centrée réduite**

On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

On a représenté cette fonction sur les trois histogrammes de loi de Z.

Courbes de Gauss et Histogrammes des lois de probabilité de $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ **pour** $p = 0.35$



1. Que constate-t-on ?
2. Conjecturer la valeur de $I = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 f(x)dx + \lim_{t\to+\infty} = \int_0^t f(x)dx$, puis les valeurs de $I_1 = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 f(x)dx$ et $I_2 = \lim_{t\to+\infty} = \int_0^t f(x)dx$.
3. Que donne Géogébra comme valeur approchée de $J = \int_{-1}^{2} f(x)dx$?
4. Interpréter graphiquement cette intégrale, puis en termes de probabilités sur X.

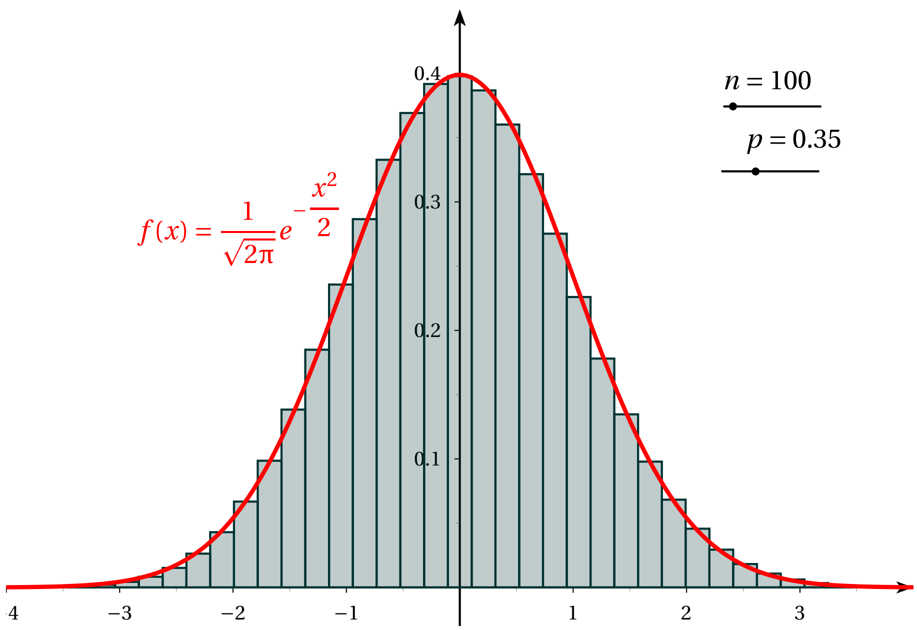
Rappel
Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p, lorsque X compte les succès lors de n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Dans ce cas, EX) $= np$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Théorème 1. (Moivre-Laplace, Admis)

Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n;p)$. On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Pour tous réels a et b, avec $a < b$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a \leq Z_n \leq b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$



IV) Lois normales

IV.1. La loi normale centrée réduite

Proposition 1. (Admise)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2}}$. On a :

$$\lim_{t\to-\infty} \int_t^0 f(x)\,dx = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to+\infty} = \int_0^t f(x)\,dx$$

Ainsi, la fonction f étant de plus clairement continue est positive sur $\mathbb{R}$, est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Définition 5.

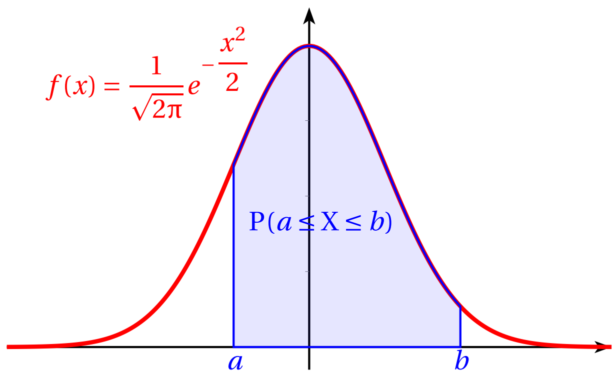
La loi normale centré réduite $\mathcal{N}(0,1)$ est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

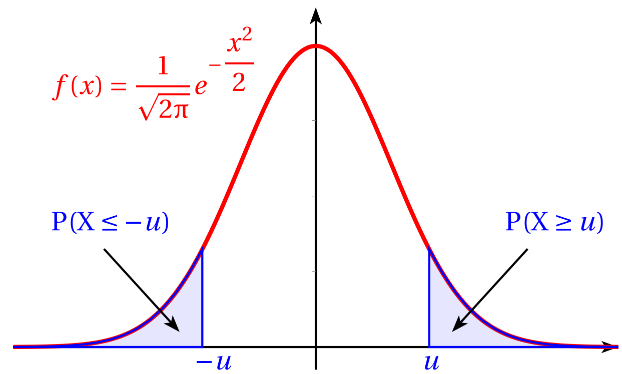
Remarques :

- La loi normale modélise des phénomènes naturels très fréquents (d'où son nom), qui résultent de l'addition de plusieurs causes indépendantes, comme la taille d'individus, le taux de cholestérol, les erreurs de mesure ...
- Ainsi, si une variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$, pour tous réels a et b tels que $a < b$ on a :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

- La fonction f est paire, sa courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. D'où :
  - $P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = \dfrac{1}{2}$
  - Pour tout réel u on a $P(X \leq -u) = P(X \geq u) = 1 - \mathbb{P}(X < u) = 1 - P(X \leq u)$
  - Si $u \geq 0$ on a aussi $P(-u \leq X \leq u) = 2P(0 \leq X \leq u) = 1 - 2P(X > u) = 2P(X \leq u) - 1$





- Le théorème de Moivre-Laplace implique donc, si une variable X_n suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$ et si $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, alors la loi de probabilité de Z_n, lorsque n devient grand, « tend vers » la loi normale centrée réduite.
  Dans la pratique, on remplace Z_n par une variable Z qui suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$ pour approximer des résultats sur la loi binomiale de X_n. On estime l'approximation satisfaisante dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

n	15	50	100	100	100
p	0.4	0.4	0.4	0.02	0.98
$P(3 \leq X_n \leq 12)$	0.97	0.013	6×10^{-10}	0.32	2×10^{-135}
$P\left(\frac{3-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z \leq \frac{12-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$	0.94	0.010	55×10^{-10}	0.23	4×10^{-10}

  Mais pour $n = 100$ et $p = 0.98$, on trouve $P(90 \leq X_n \leq 95) \simeq 0.051$ contre $P\left(\dfrac{90-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \dfrac{95-\mu}{\sigma}\right) \simeq 0.016$
- Vous constatez que vous ne savez pas calculer cette intégrale. On aura alors besoin de la calculatrice pour trouver des probabilités ou encore de tables de valeurs fournies par les énoncés.
  La plupart des calculs liés à la loi normale seront donc des estimations.

Exemple :

Pondichéry 2013

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

Cette entreprise emploie 220 salariés. On admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.
2. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.
   On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
   Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

x	$-1,55$	$-1,24$	$-0,93$	$-0,62$	$-0,31$	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$P(Z < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b., une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

A la calculatrice

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

1. Calculer $P(a \leq X \leq b)$. Par exemple, $P(-1.5 \leq X \leq 2)$.

Modèles	Instruction à l'écran	Commandes
TI 82 à 84	`normalFRép(-1.5,2)`	Appuyer sur **2nde** + **var** Choisir `2:normalFRép(`
TI 89	`ti.stat.normfdr(-1.5,2)`	Dans l'écran de calcul Appuyer sur **CATALOG** Puis `F3 AppFlash` Choisir `normFdR(`

2. Déterminer α tel que $P(X \leq \alpha) = p$, avec p donné appartenant à $[0;1]$.
   Par exemple, pour trouver α tel que $P(X \leq \alpha) = 0.2$.

Modèles	Instruction à l'écran	Commandes
TI 82 à 84	`FracNormale(0.2)`	Appuyer sur **2nde** + **var** Choisir `3:FracNormale(`
TI 89	`ti.stat.invNorm(0.2)`	Dans l'écran de calcul Appuyer sur **CATALOG** Puis `F3 AppFlash` Choisir `invNorm(`

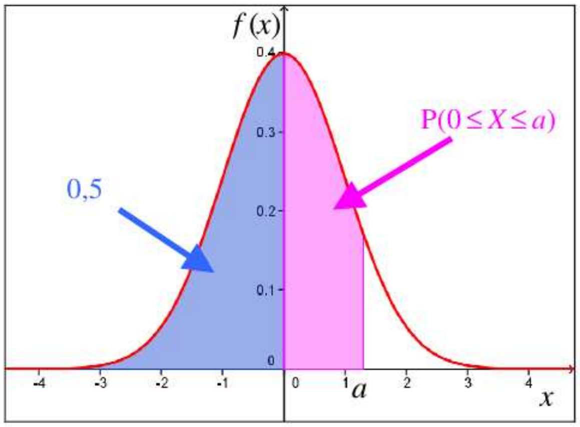
Remarques :

⇝ Pour calculer $P(X \leq 1)$, il faudra penser à écrire $P(X \leq 1) = P(X \leq 0) + P(0 \leq X \leq 1) = \dfrac{1}{2} + P(0 \leq X \leq 1)$, ce qui s'obtient désormais à la calculatrice. On trouve environ 0.84.

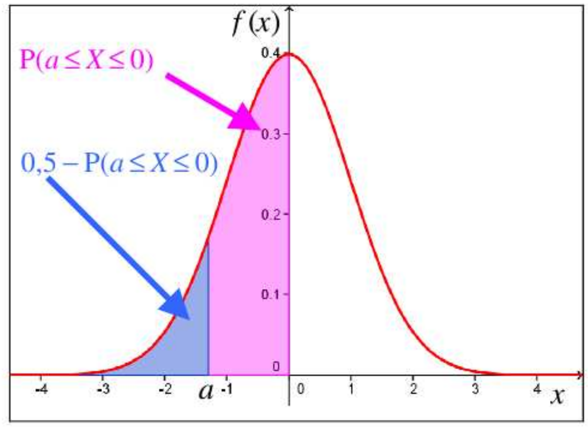
- De même, pour avoir $P(X \leq -1)$ on écrira $P(X \leq -1) = P(X \leq 0) - P(-1 \leq X \leq 0) = \dfrac{1}{2} - P(-1 \leq X \leq 0)$. On trouve environ 0.16.

- Visualiser les aires sous la courbe aide à faire ses transformations.
  De manière générale, on peut voir que pour calculer $P(X \leq a$:

Si $a \leq 0$ on utilise $P(X \leq a) = 0.5 + P(0 \leq X \leq a)$



Si $a \geq 0$ on utilise $P(X \leq a) = 0.5 - P(a \leq X \leq 0)$



Propriété 4.

Soit une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$. On a :

$$E(X) = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 x f(x)dx + \lim_{t\to+\infty} = \int_0^t x f(x)dx = 0$$

et $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = 1$

Preuve

$$\int_t^0 x f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^0 x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_t^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-1 + e^{-\frac{t^2}{2}}\right)$$ D'où $\lim_{t\to-\infty} \int_t^0 x f(x)dx = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

De même $\displaystyle\int_0^t x f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{t^2}{2}} - 1\right)$ D'où $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_0^t x f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Donc $E(X) = 0$

Théorème 2.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
Pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que

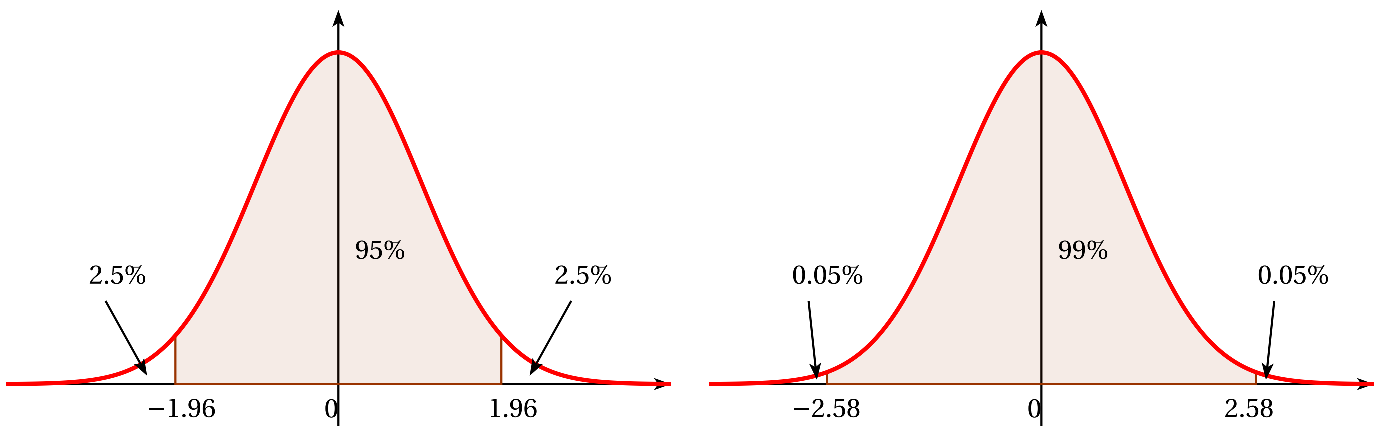
$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Preuve

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(t) = \mathrm{P}(-t \leq \mathrm{X} \leq t) = \int_{-t}^{t} f(x)dx$ où f est la fonction densité de la loi normale centrée réduite.
On cherche à applique le TVI à g. Comme f est paire, on a pour tout t positif, $g(t) = 2\int_0^t f(x)dx$
De plus, f est continue et positive, donc $2f$ aussi, et g est la primitive de $2f$ qui s'annule en 0 (d'après le théorème fondamental).
Ainsi g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ donc continue sur $\mathbb{R}^+$.
Ensuite, il est clair que $2f$ strictement positive implique que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Enfin, comme $\alpha \in]0;1[$ on a $1-\alpha \in]0,1[$ et on a $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} 2\int_0^t f(x)dx = 2\times\frac{1}{2} = 1$.
D'après le corollaire du TVI, il existe un uniquement réel $u_\alpha \in]0;1[$ tel que $g(u_\alpha) = 1-\alpha$.

Remarques :

- On retiendra deux valeurs : $u_{0.05} \simeq 1.96$ et $u_{0.01} \simeq 2.58$.
  Ainsi, $\mathrm{P}(-1.96 \leq 1.96) \simeq 0.95$ et $\mathrm{P}(-2.58 \leq 2.58) \simeq 0.99$
- Cela donne une idée de la répartition : environ 95% des réalisations de X sont entre -1.96 et 1.96.



IV.2. La loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

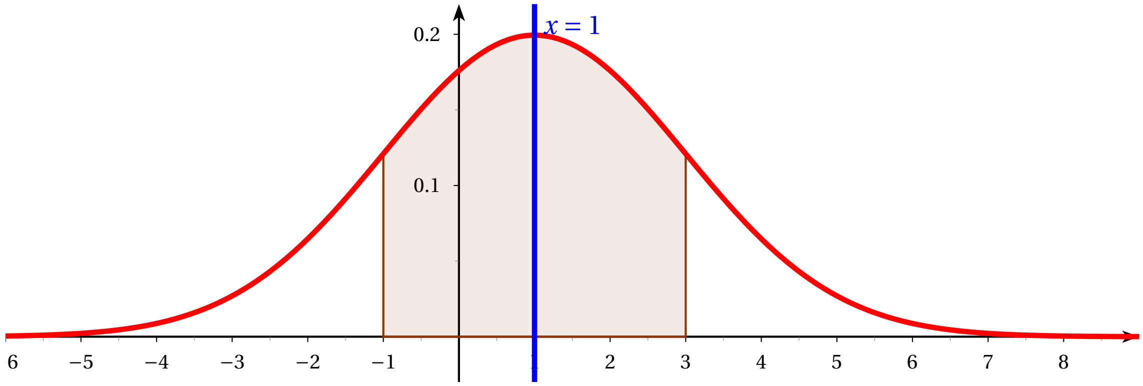
Définition 6.

Soient un réel μ et un réel strictement positif σ.
On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ si la variable aléatoire $\dfrac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Remarque : Dans la pratique, grâce au théorème de Moivre-Laplace, on approxime une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par une loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ avec $\mu = np$ et $\sigma^2 = np(1-p)$.
On considère que l'approximation est satisfaisante dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

Exemple :

Loi normale $\mathcal{N}(1,4)$ **:** $\mu = 1$ **et** $\sigma = 2$



Méthodes de calcul

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Par exemple $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1,4)$

1. Calculer $P(a \leqslant X \leqslant b)$. Par exemple $P(-1 \leqslant X \leqslant 3)$.

⇝ On se ramène à une loi normale centrée réduite en écrivant :

$$P(-1 \leqslant X \leqslant 3) = P(-2 \leqslant X-1 \leqslant 2) = P\left(-1 \leqslant \frac{X-1}{2} \leqslant 1\right) = P(-1 \leqslant Z \leqslant 1) \text{ où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

A la calculatrice, on trouve $P(-1 \leqslant X \leqslant 3) \simeq 0.683$.

⇝ On calcule directement cette valeur sur la calculatrice en rajoutant les paramètres μ et σ aux commandes déjà connues.

Modèles	Instruction à l'écran	Commandes
TI 82 à 84	`normalFRép(-1,3,1,2)`	Appuyer sur **2nde** + **var** Choisir `2:normalFRép(`
TI 89	`ti.stat.normfdr(-1,3,1,2)`	Dans l'écran de calcul Appuyer sur **CATALOG** Puis `F3 AppFlash` Choisir `normFdR(`

2. Déterminer α tel que $P(X \leqslant \alpha) = p$, avec p donné appartenant à $[0;1]$.
Par exemple, on cherche α tel que $P(X \leqslant \alpha) = 0.9$.

⇝ On se ramène à une loi normale centrée réduite en écrivant :

$$P(X \leqslant \alpha) = P(\leqslant X-1 \leqslant \alpha-1) = P\left(\frac{X-1}{2} \leqslant \frac{\alpha-1}{2}\right) = P(Z \leqslant \beta) \text{ où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \text{ et } \beta = \frac{\alpha-1}{2}.$$

A la calculatrice, on trouve $\beta \simeq 1.28$ donc $\alpha \simeq 3.56$.

⇝ On trouve directement α sur la calculatrice en rajoutant les paramètres μ et σ aux commandes déjà connues.

Modèles	Instruction à l'écran	Commandes
TI 82 à 84	`FracNormale(0.9,1,2)`	Appuyer sur **2nde** + **var** Choisir `3:FracNormale(`
TI 89	`ti.stat.invNorm(0.9,1,2)`	Dans l'écran de calcul Appuyer sur **CATALOG** Puis `F3 AppFlash` Choisir `invNorm(`

Attention !

Les calculatrices demandent μ et σ en arguments, et non σ^2.
Si on ne les précise pas, elle considère que $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ (donc elle fait les calculs pour une loi normale centrée réduite).

Propriété 5.

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On a :

$$E(X) = \mu \qquad , \qquad V(X) = \sigma^2 \qquad \text{et} \qquad \sigma(X) = \sigma$$

Preuve

Par définition, $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On a donc

$$E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = 0 \iff \frac{1}{\sigma}\big(E(X)-\mu\big) = 0 \iff E(X)-\mu = 0 \iff E(X) = \mu$$

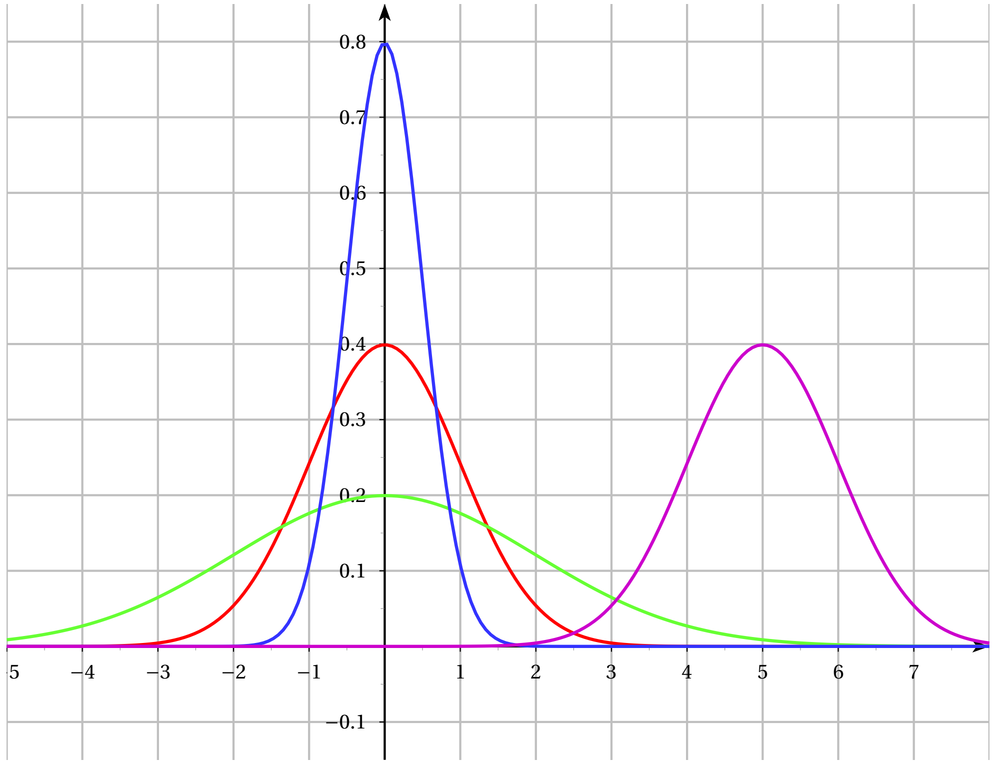
De même,

$$V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = 1 \iff \frac{1}{\sigma^2}V(X) = 1 \iff V(X) = \sigma^2 \iff \sigma(X) = |\sigma| = \sigma$$

Remarques :

- μ est un paramètre de position et σ un paramètre de dispersion.
- La densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ est représentée par une courbe en cloche, dont l'axe de symétrie vertical est $x = \mu$.
  Plus σ est petit, et moins la dispersion est grande, donc plus la cloche est resserrée autour de son axe de symétrie.

Reconnaître les lois $\mathcal{N}(0,1)$, $\mathcal{N}(0,1/4)$, $\mathcal{N}(0,2)$ et $\mathcal{N}(5,1)$ parmi les quatre courbes représentées ci-dessous.



Exemple :

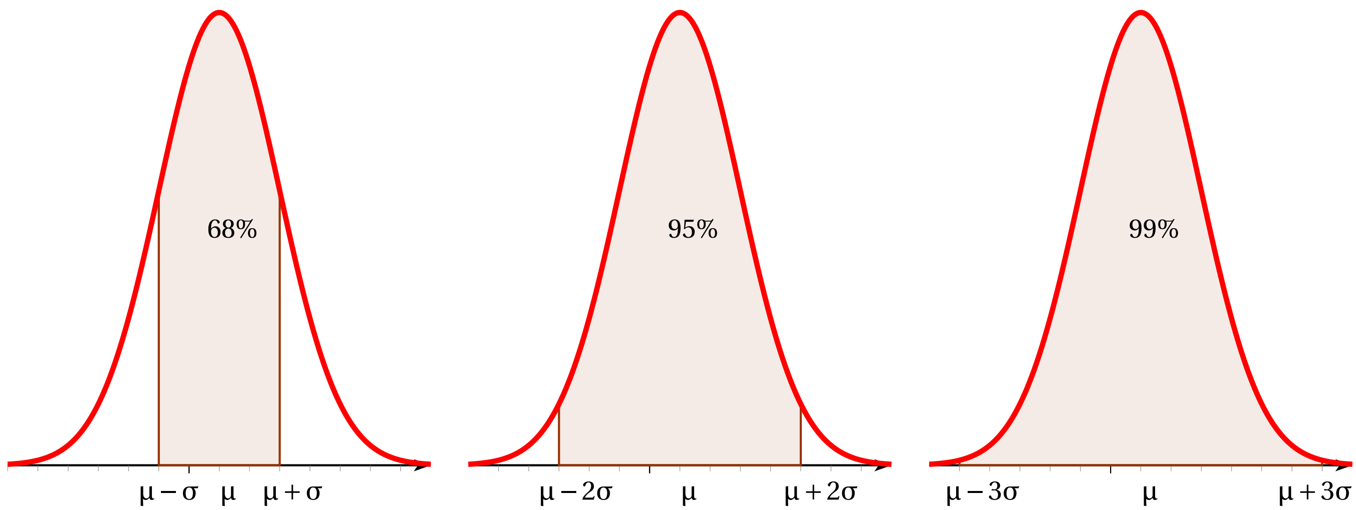
La masse en kg des nouveaux nés à la naissance est une variable aléatoire qui peut-être modélisée par une loi normale [a] de moyenne $\mu = 3.3$ et d'écart-type $\sigma = 0.5$.

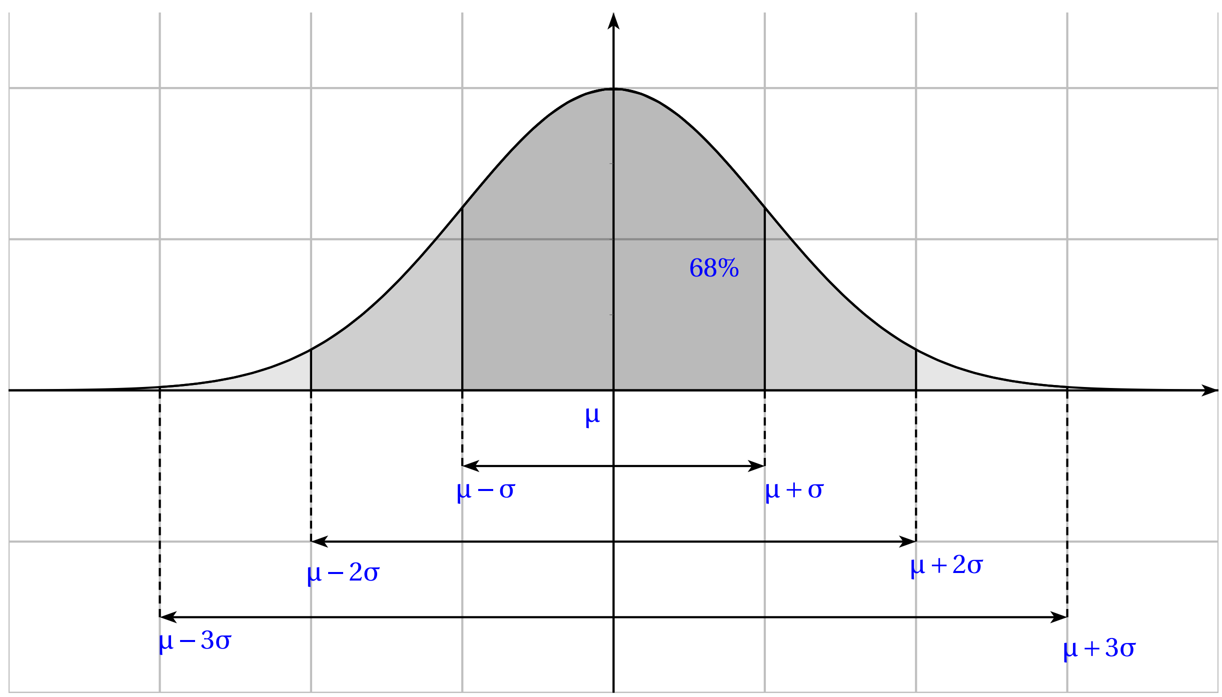
1. Déterminer $P(X < 2.5)$ en vous ramenant à une loi normale centrée réduite.
   Retrouver $P(X < 2.5)$ en utlisant la symétrie de la courbe représentative de la densité de la loi $\mathcal{N}(3.3, 0.5)$.

a. Le poids d'un nouveau né ne prend pas de valeurs négatives ni trop grandes, mais on peut vérifier que $P(X < 0)$ et $P(X > 5)$ sont négligeable.

Propriété 6.

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On a :
- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \simeq 0.683$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \simeq 0.954$
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \simeq 0.997$





Preuve

$$P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) = P(-\sigma \leq X-\mu \leq \sigma) = P\left(-1 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1\right) \simeq 0.683$$

car $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
De même pour les autres approximations.

Exemple :

Une compagnie est spéciaisée dans l'empaquetage de jus. L'équipement permettant cet ouvrage verse une quantité X de jus dans chacune des bouteilles de format 1000 ml. Cette quantité peut varier un peu d'une bouteille à l'autre.

On considère alors que X suit une loi normale de paramètre μ et $\sigma^2 = 25\ \text{ml}^2$ et on appelle Z la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$.

1. Dans un premier temps, on considère $\mu = 1000$.
   - **a.** Déterminer la probabilité qu'une bouteille contiennent moins de 1000 ml.
   - **b.** Déterminer l'intervalle dans lequel se situe 99% de la production.
2. Reprendre les deux questions précédentes avec $\mu = 1005$ ml.
3. La législation impose qu'il y ait moins de 1% des bouteilles contiennent moins de 1000 ml.
   - **a.** Déterminer μ pour que l'embouteilleur respecte la législation et interpréter.
   - **b.** La contenance des bouteilles étant de 1020 ml, quelle est la probabilité qu'une bouteille déborde lors du remplissage ?
   - **c.** Un inspecteur choisit un échantillon de 20 bouteilles, au hasard et avec remise, parmi la production de la journée.
     L'embouteilleur recevra une amende si l'inspecteur trouve au moins une bouteille contenant moins de 1000 ml.
     On appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre de bouteilles dans l'échantillon qui contiennent moins de 1000 ml. Quelle est la probabilité que l'embouteilleur reçoive une amende ?

Solution :

1. **a.** Par symétrie de la courbe, on sait que $P(X \leq 1000) = \dfrac{1}{2}$

   b. On sait que

   c. $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \simeq 0.99$ donc $X \in [985; 1015]$

2. **a.** On a $P(X \leq 1000) = 0.5 - P(1000 \leq X \leq 1005) = 0.5 - \dfrac{1}{2}P(1000 \leq X \leq 1010) \simeq 0.5 - \dfrac{1}{2}0.683 = 0.1585$
   Ou encore, à la calculatrice, en calculant $P(1000 \leq X \leq 1005)$, on trouve environ 0.1587, donc presque pareil.

   b. On sait que $X \in [1005 - 15; 1005 + 15]$ ie $X \in [990; 1020]$ dans 99% des cas.

3. **a.** On sait que Z suit une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$. On cherche alors μ tel que

$$P(X \leq 1000) = 0.01 \iff P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{1000-\mu}{\sigma}\right) = 0.01 \iff P\left(Z \leq \frac{1000-\mu}{5}\right) = 0.01$$

   On cherche donc α tel que $P(Z \leq \alpha) = 0.01$.
   Grâce à la calculatrice, on trouve $\alpha \simeq -2.326$. Ainsi

$$\frac{1000-\mu}{5} \simeq -2.326 \iff \mu \simeq 1011.632$$

   L'embouteilleur doit verser en moyenne 1012 ml par bouteille pour que environ 1% des bouteilles contiennent moins de 1000 ml.
   On peut vérifier en cherchant à la calculatrice α *tel que* $P(X \leq \alpha) = 0.01$ *pour la loi de* X.
   On doit évidemment trouver une valeur proche de 1000.

   b. A la calculatrice, avec $\mu \simeq 1011.6$, on trouve $P(X > 1020) = 0.5 - P(1011.6 < X < 1020) \simeq 0.046$.

   c. On répète 20 fois de manière identique et indépendante, l'épreuve de Bernoulli qui consiste à choisir une bouteille, le succès étant « la bouteille contient moins de 1000 ml », de probabilité 0.01 d'après ce qui précède.
   Y compte le nombre de succès, donc Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et 0.01.
   On cherche $P(Y \leq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0.99^2 0 \simeq 0.18$
   La probabilité que l'embouteilleur reçoive une amende est de 0.18.