Travail de l'élève **1.**

Partie A : Activité 3 p 225 (recherche historique sur internet)

Partie B : Sur la trace des mathématiciens

Au début du XVI$^{\text{ème}}$ siècle, le mathématicien Scipione dal Ferro, propose une formule donnant une solution aux équations du 3$^{\text{ème}}$ degré de la forme $x^3 + px = q$ [1] :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}}$$

Vous avez déjà rencontré et appliqué ces formules dans un devoir maison, pour résoudre l'équation

$$\text{(E)} : x + x^2 + x^3 = 1$$

On avait effectué le changement de variable $\mathrm{X} = x + \frac{1}{3}$ et on avait montré que (E) $\iff \mathrm{X}^3 + \frac{2}{3}\mathrm{X} = \frac{34}{27}$.

La solution ressemblait à ceci : $\mathrm{X} = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{17 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{17 - 3\sqrt{33}}\right)$

Et donc $x = \mathrm{X} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{17 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{17 - 3\sqrt{33}} - 1\right)$.

Bref, easy ... Et bien on recommence !

1. Comme Bombelli à la fin de ce siècle, appliquez cette formule à l'équation $x^3 - 15x = 4$.
2. Quel problème survient ?
3. Euler (XVIII^e) étant passé depuis Bombelli (XVI^e), notons nous aussi i le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$ (ce qui nous évite d'utiliser le symbole imaginaire $\sqrt{-1}$ qui n'a pas de sens, car contraire à la définition de la racine carré d'un nombre).
   Admettons désormais comme Bombelli, juste pour voir ce que cela donne, que l'on puisse prolonger les règles usuelles de calcul aux racines carrés de nombres négatifs et calculons $(2 + i)^3$ et $(2 - i)^3$
4. Quelle serait alors une solution réelle de l'équation ? Le vérifier.
5. Déterminer a, b et c tels que $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(ax^2 + bx + c)$
6. Déterminer alors toutes les solutions de l'équation $x^3 - 15x = 4$.

Une question naturelle s'est alors posée : peut-on légitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-dessus ? C'est ainsi qu'est née la théorie des nombres complexes, qui a mis bien longtemps à s'imposer et a déchaîné bien des passions …

Partie C : A vous de jouer !

1. Essayez de compter un peu avec ces nombres, en simplifiant au maximum les expressions suivantes :

$$\mathrm{A} = (3 + 4i)^2 \qquad \mathrm{B} = (3 - 4i)^2 \qquad \mathrm{C} = (3 + 4i)(3 - 4i) \qquad \mathrm{D} = (3 + 4i)(i - 1)$$

$$\mathrm{E} = (5 - 3i)(7 - 2i) \qquad \mathrm{F} = (i - 2)(2 + i) \qquad \mathrm{G} = (5 + 7i)(3 - i)(2 - 3i) \qquad \mathrm{H} = \frac{6 - 4i}{2 + 3i}$$

2. Que constatez-vous ?

1. Vous pouvez essayer de le prouver en posant $x = u + v$ et en résolvant un système d'équations d'inconnues u et v.

***Travail de l'élève* 2.** L'objectif de l'activité est de résoudre dans $\mathbb{C}$ de l'équation $X^2 = a$, avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler les solutions de l'équation $X^2 = a$ dans le cas où $a \geq 0$.
2. On cherche ensuite à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 = -3$.
   - **a.** Vérifier que $i\sqrt{3}$ est solution dans $\mathbb{C}$ de cette équation.
   - **b.** En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de cette équation.
3. On cherche désormais à généraliser notre raisonnement et à trouver toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $X^2 = a$ dans le cas $a < 0$.
   - **a.** Vérifier que $a = \left(i\sqrt{-a}\right)^2$.
   - **b.** En déduire que l'équation considérée possède deux solutions complexes que l'on précisera.

***Travail de l'élève* 2.** L'objectif de l'activité est de résoudre dans $\mathbb{C}$ de l'équation $X^2 = a$, avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler les solutions de l'équation $X^2 = a$ dans le cas où $a \geq 0$.
2. On cherche ensuite à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 = -3$.
   - **a.** Vérifier que $i\sqrt{3}$ est solution dans $\mathbb{C}$ de cette équation.
   - **b.** En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de cette équation.
3. On cherche désormais à généraliser notre raisonnement et à trouver toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $X^2 = a$ dans le cas $a < 0$.
   - **a.** Vérifier que $a = \left(i\sqrt{-a}\right)^2$.
   - **b.** En déduire que l'équation considérée possède deux solutions complexes que l'on précisera.

***Travail de l'élève* 3.** L'objectif de l'activité est de résoudre dans $\mathbb{C}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et c réels tels que $a \neq 0$.

1. Rappeler le discriminant Δ de cette équation, ainsi que les solutions de l'équation $ax^2 + b + c = 0$ dans le cas où $\Delta \geq 0$.
2. On cherche ensuite à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2x^2 - 3x + 4 = 0$.
   - **a.** Calculer le discriminant Δ de cette équation. Quel problème survient ?
   - **b.** Ecrire Δ sous la forme d'un carré de nombre complexe.
   - **c.** Vérifier que le nombre $x_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ est solution de l'équation considérée.
   - **d.** Quelle est alors l'autre solution de l'équation ?
3. On cherche désormais à généraliser notre raisonnement et à trouver toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans le cas le discriminant Δ est strictement négatif.

   On rappelle que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ peut s'écrire de manière équivalente $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$.
   - **a.** Vérifier que $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$.
   - **b.** En remplaçant Δ par cette nouvelle écriture, résoudre alors l'équation considérée.