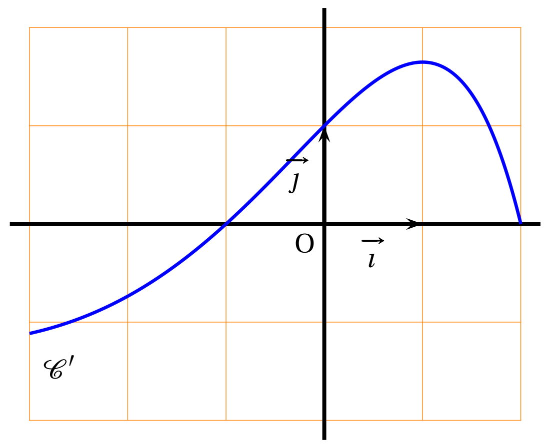
EXERCICES
TOUJOURS À LA DÉRIVE ...

Exercice 1 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.
   *On dit que f est une fonction **impaire**.*
2. On donne $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   - **a.** Dresser le tableau de signe de la fonction f'.
   - **b.** En déduire le tableau de variation de la fonction f.
   - **c.** Préciser les extrema locaux de f.
3. Tracer la représentation graphique de la fonction f à la calculatrice sur l'intervalle $[-4;4]$ et vérifier graphiquement vos résultats.
4. Quelle symétrie présente cette courbe ?
   Les courbes représentatives de fonctions impaires sont symétriques par rapport à ...

Exercice 2 : Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3\,;\,2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{C}'$ ci-contre.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3,-1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\,;\,2]$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;\,2]$, $f(x) \geqslant -1$.
4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1\,;\,0)$.

Exercice 3 : Pour chacune des fonctions f suivantes, donner leur ensemble de définition, calculer leur fonction dérivée, puis dresser leur tableau de variations :

$$f : x \longmapsto \frac{5x^2}{3} + \frac{3}{4}x + \frac{1}{6} \qquad f : x \longmapsto x^2\sqrt{2} - x\sqrt{5} + \sqrt{3} \qquad f : x \longmapsto -x^3 + 5x^2 - 2$$

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x} + 4x \qquad f : x \longmapsto \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}x \qquad f : x \longmapsto \frac{-x+2}{2x+5}$$

Exercice 4 : Pour chacune des fonctions f suivantes, donner leur ensemble de définition et calculer leur fonction dérivée :

$$f : x \longmapsto (2x+3)\sqrt{x} \qquad f : x \longmapsto (3\sqrt{x}+1)^4 \qquad f : x \longmapsto (5x^4 + 2x^3 - 4x + 1) \times \frac{1}{x}$$

$$f : x \longmapsto \frac{1}{9} - \frac{1}{x^3} \qquad f : x \longmapsto \frac{x^2+5x-2}{x^7-4} \qquad f : x \longmapsto \frac{x^2-x+7}{5} \qquad f : x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{2x+5}$$

Exercice 5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + 1$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$
3. En déduire le tableau de variations de f.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Exercice 6 :

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ par $g(x) = 2x^3 + 12x^2 + 2$
   a. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.
   b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x+4}$.
   a. Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ et calculer sa dérivée.
   b. En utilisant les questions précédentes, établir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$

Exercice 7 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Soit A le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A
3. Soit B le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathscr{C}_f$ en B
4. Vérifier graphiquement vos résultats en traçant $\mathscr{C}_f$, T_A et T_B à la calculatrice.

Exercice 8 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer T et $\mathscr{C}_f$ sur votre calculatrice.
4. Expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2;3]$.
5. Donner une valeur approchée de α, par défaut, à 10^{-1} près.

Exercice 9 : Le but de cet exercice est de calculer la limite suivante :

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^{2005} - 1}{h}$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^{2005}$

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f. Puis calculer $f'(0)$.
2. Calculer le taux de variation de la fonction f entre 0 et h.
3. Conclure.