EXERCICES
DE LA SUITE DANS LES IDÉES !

Exercice 1 : Soit la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 2v_n + 3n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3.
2. Exprimer v_n, v_{n-1}, v_{2n} et v_{3n-1} en fonction du terme approprié de la suite (v_n).
3. Calculer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de n.

Exercice 2 : Soient (w_n) et (S_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$w_n = -n^2 + 2n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_n = w_{n+1} - w_n$$

1. Exprimer w_{n+1} en fonction de n.
2. En déduire l'expression de S_n en fonciton de n.
3. Exprimer S_{n+1} en fonction de n.
4. En déduire que $\mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n = -2$

Exercice 3 : On donne :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 3 \quad ; \quad u_2 = 7 \quad ; \quad u_3 = 15 \quad ; \quad u_4 = 31 \quad ; \quad u_5 = 63 \quad ; \quad u_6 = 127$$

1. Proposer une valeur pour u_7.
2. Proposer une formule donnant u_{n+1} en fonction de u_n. Vérifier qu'elle est correcte sur les premiers termes.
3. Proposer une formule donnant u_n en fonction de n. Vérifier qu'elle est correcte sur les premiers termes.

Exercice 4 : La suite u est définie, pour tout entier naturel n, par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 2 - 3n$

Exercice 5 :

On considère l'algorithme ci-contre.

1. Compléter la trace d'exécution de cet algorithme dans le tableau ci-dessous, avec l'entrée $n = 5$.

Test								
u	-4							
i	0							

2. Que renvoit l'algorithme si on entre la valeur 0 pour n ?
3. Soit n un entier naturel et u_n la valeur renvoyée par l'algorithme avec l'entrée n.
   a. Quel est le rang initial de la suite (u_n) ?
   b. Quelle relation existe-t-il entre u_{n+1} et u_n ?
4. Modifier cet algorithme pour que, lorsuq'on entre un entier n, il renvoit la somme des termes de la suite (u_n) jusqu'au terme de rang n.

Algorithme 1 :

Entrée(s) :
n un entier naturel
Variable(s) :
u est un nombre réel.
i est un entier naturel.
Début
  $u \longleftarrow -4$
  $i \longleftarrow 0$
  Tant que $(i < n)$ **Faire**
    $u \longleftarrow \dfrac{3}{2}u + 1$
    $i \longleftarrow i + 1$
  Fin Tant que
  Renvoyer u
Fin

Exercice 6 : On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par l'algorithme suivant :

Algorithme 2 : *Suite* (v_n)

Entrée(s) :
n un entier naturel
Variable(s) :
v est un nombre réel.
Début
v prend la valeur $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$
Renvoyer v.
Fin

1. Si l'utilisateur rentre l'entier $n = 5$, que renvoit l'algorithme ?
2. Que fait cet algorithme ?
3. Compléter :

$$\begin{cases} v_{4n} = \ldots\ldots \\ v_{4n+1} = \ldots\ldots \\ v_{4n+2} = \ldots\ldots \\ v_{4n+3} = \ldots\ldots \end{cases}$$

Exercice 7 :

1. Compléter la trace d'exécution de cet algorithme dans le tableau ci-dessous, avec l'entrée $n = 5$.

i						
c						
a	1					
b	2					

2. Si l'utilisateur choisit l'entier $n = 7$, que renvoit l'algorithme ?
3. On considère la suite (u_n) définie par l'algorithme ci-contre. Donner une définition par récurrence de la suite (u_n).
4. Proposer une définition explicite de u_n en fonction de n.
5. Modifier alors l'algorithme pour qu'il ne calcule et ne renvoit que le terme de rang n de la suite (u_n).

Algorithme 3 :

Entrée(s) :
n un entier naturel ($n \geq 2$).
Variable(s) :
a, b et c sont des nombres réels.
i est un nombre entier.
Début
$a := 1$
$b := 2$
Pour i allant de 2 à n **Faire**
$c := 5b - 6a$
$a := b$
$b := c$
Renvoyer c.
Fin Pour
Fin

Exercice 8 : On considère les suites (w_n) et (s_n) définies par les algorithmes suivants :

Algorithme 4 : *Suite* (w_n)

Entrée(s) :
n est un entier naturel.
Variable(s) :
w est un nombre réel.
i est un nombre entier naturel.
Début
w reçoit la valeur $4 \times (-2)^n + 1$
Renvoyer w.
Fin

PARTIE A. **La suite w**

1. Si l'utilisateur choisit l'entier $n = 5$, que renvoit l'algorithme 4 ?
2. Proposer une définition pour la suite (w_n).
3. Modifier l'algorithme pour que, lorsqu'on entre un entier n, il renvoit la liste des termes de la suite (w_n) jusqu'à w_n.

Algorithme 5 : *Suite* (s_n)

Entrée(s) :
n est un entier naturel ($n \geq 3$).
Variable(s) :
s est un nombre réel.
i est un nombre entier naturel.
Début
    $s := -1$
    Pour i allant de 3 à n **Faire**
        $s := \sqrt{\dfrac{1+s}{2}}$
        Renvoyer s
    Fin Pour
Fin

PARTIE B. **La suite s**

1. **a.** Compléter la trace d'exécution de cet algorithme dans le tableau ci-dessous, avec l'entrée $n = 5$.

i						
s						

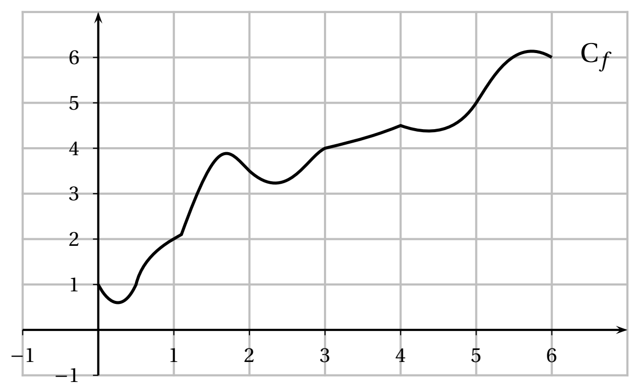
   b. Que renvoit dans ce cas l'algorithme 5 ?
2. Proposer une définition par récurrence de la suite (s_n).
3. Modifier l'algorithme pour qu'il n'affiche que le terme de rang n de la suite (s_n).

Exercice 9 : Soit la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-2)^n + 3$ et la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = -2v_n + 9 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

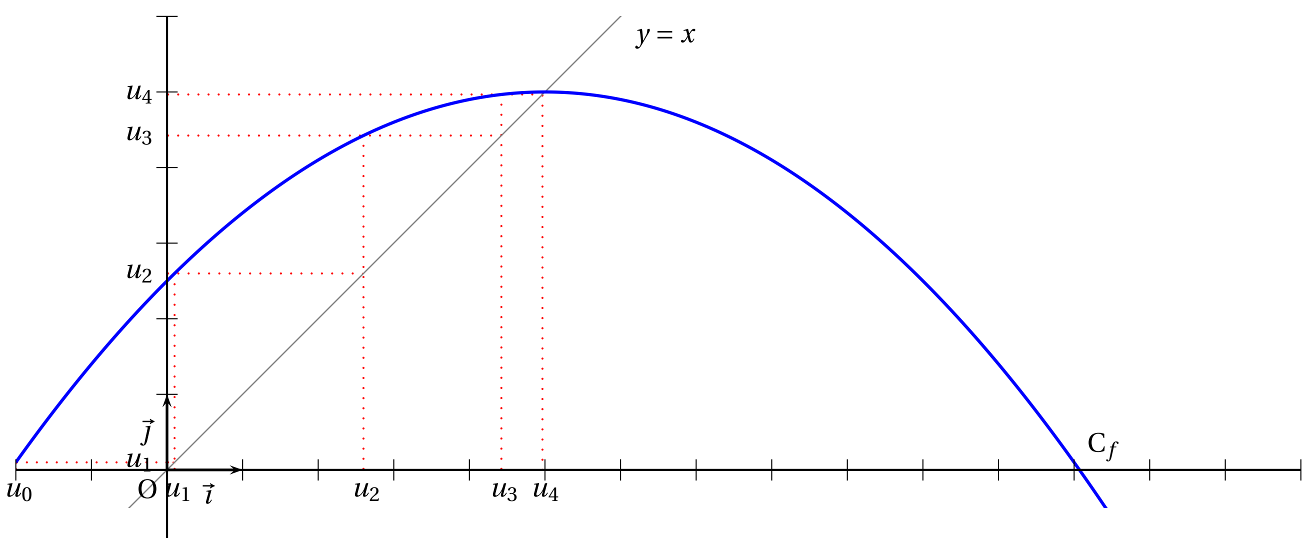
1. Pour chacune des suites u et v :
   a. Déterminer les valeurs des trois premiers termes.
   b. Vérifier à la calculatrice les réponses de la question précédente.
2. Quelle conjecture peut-on émettre sur les suites u et v ? Démontrer cette conjecture.

Exercice 10 : Soit f la fonction définie par sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ ci-contre et la suite u de terme général $u_n = f(n)$.

1. Lire une valeur approchée des termes de u_0 à u_5.
2. Que peut-on dire du comportement des premiers termes de u ?



Exercice 11 :

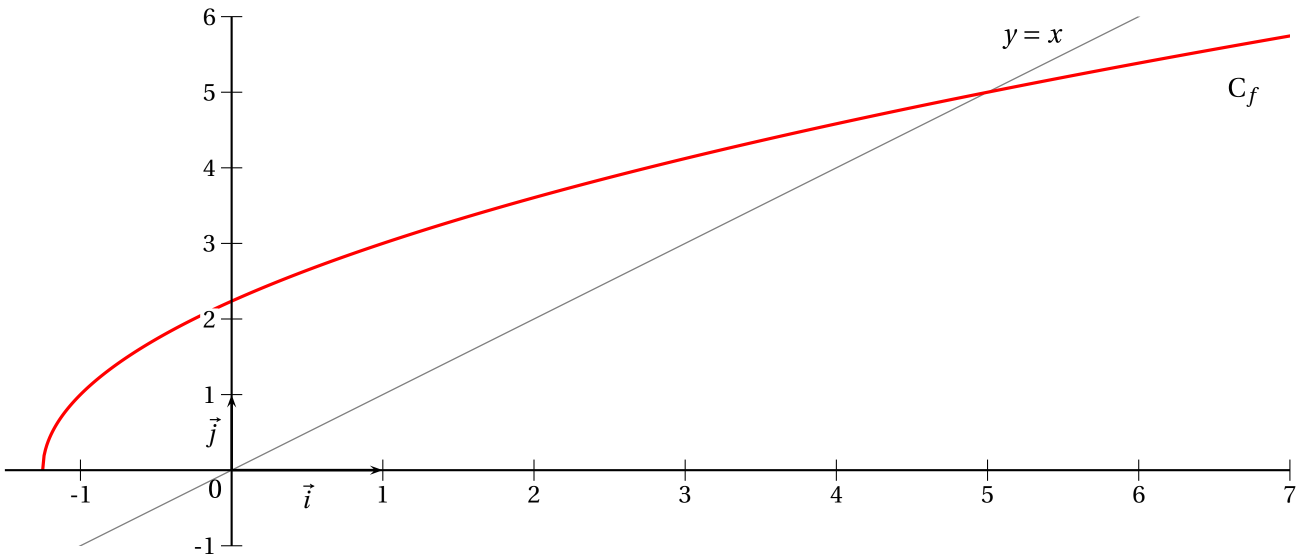


On a tracé ci-dessus dans un repère orthonormé la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f, la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$. ainsi que les cinq premiers termes de la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n.

1. Donner, par lecture graphique, u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. On donne $\mathscr{C}_f = \left\{\text{M}(x, y) \text{ tels que } y = -0,1(x-5)^2+5\right\}$.
   - **a.** Donner l'expression $f(x)$ puis l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
   - **b.** Calculer les valeurs des termes u_1 à u_4 à partir de la valeur u_0 lue à la question précédente.
3. On modifie la valeur $u_0 = 11$. Calculer les cinq premiers termes à partir de u_0.
4. Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u avec donc $u_0 = 11$.

Exercice 12 : On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n+5} \end{cases}$

1. Donner la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Dans le repère ci-dessous on a tracé la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et la droite d'équation $y = x$.
   - **a.** Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u.
     Vérifier votre constructioin en calculant ces premiers termes.
   - **b.** Conjecturer le sens de variation de la fonction u.
   - **c.** Conjecturer la valeur limite ℓ de la suite u.

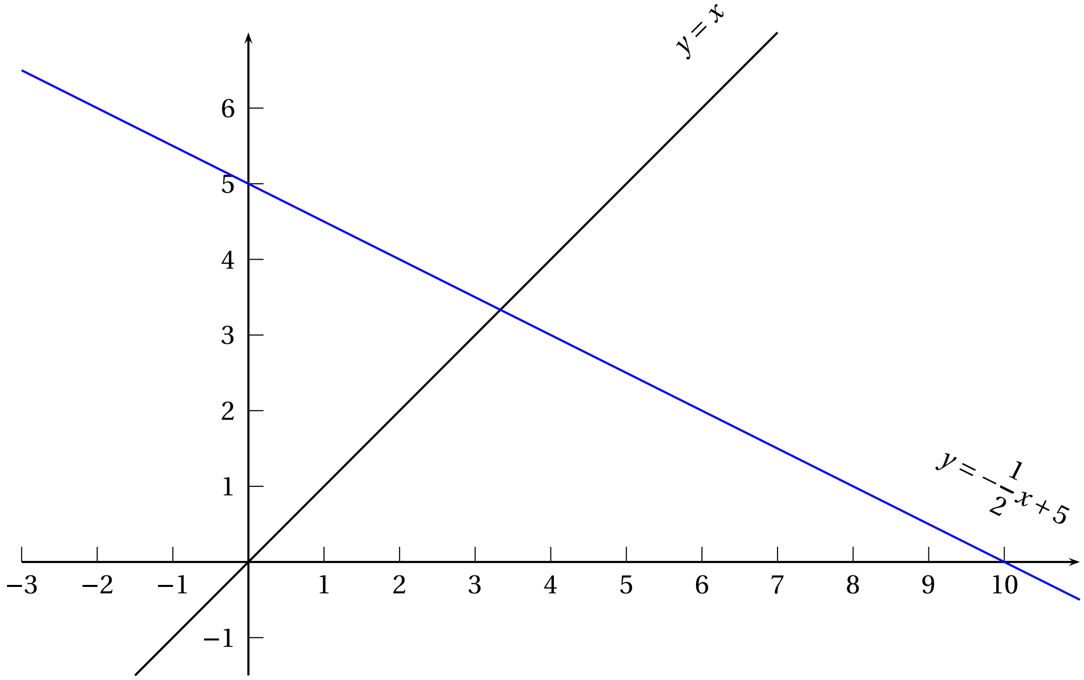


Exercice 13 : On considère la suite u définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n+1} \end{cases}$

1. Donner la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Dans un repère, en utilisant la représentation graphique de la fonction f, placer sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u pour $a = 0$. Dans ce cas conjecturer le sens de variation de la suite u.
3. Dans un repère, en utilisant la représentation graphique de la fonction f, placer sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u pour $a = 15$. Dans ce cas conjecturer le sens de variation de la suite u.
4. Que constate-t-on ?

Exercice 14 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 5$.

1. Sur la figure ci-dessous, sont tracées, dans un repère orthonormal, les droites d'équation respectives $y = x$ et $y = -\frac{1}{2}x + 5$. Construire sur l'axe des abscisses les termes u_2, u_3 et u_4.
2. Vérifier votre construction en calculant u_2, u_3 et u_4.
3. Que peut-on conjecturer sur les variations et la convergence de cette suite ?



Exercice 15 : Sans justification, dans chaque cas, déterminer si la suite converge en présicant sa limite éventuelle :

1. La suite u est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n+1}$
2. La suite v est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = (-1)^n \times n$
3. La suite w est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = n - \frac{1}{n+1}$
4. La suite s est définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $s_n = \frac{1}{n}$
5. La suite t est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_n = (-1)^n + n$
6. La suite p est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $p_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Exercice 16 : Une suite u est décroissante et converge vers 0.
La suite v est telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n < u_n$.
Dans chaque cas, indiquer la (les) bonne(s) réponse(s) :

1. Si la suite v a tous ces termes positifs alors :

   a. La suite v est décroissante. **b.** La suite v est convergente. **c.** La suite v a une limite $\ell < 0$.

2. Si La suite v est croissante alors :

a. la suite v a tous ses termes négatifs ou nuls. **b.** la suite v est convergente. **c.** la suite v converge vers 0.

Exercice 17 : Proposer un exemple de suite u telle que :

1. u est décroissante et converge vers 1.
2. u n'admet pas de limite.
3. u diverge vers $-\infty$.
4. u est croissante et converge vers π.

Exercice 18 : On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = -1 + \dfrac{1}{n}$

1. Conjecturer la limite ℓ de la suite u.
2. On donne l'algorithme ci-contre.
   a. Compléter la trace d'exécution de cet algorithme dans le tableau ci-dessous, avec l'entrée $\varepsilon = 0.3$.

Test						
u						
p						

   b. Que renvoit l'algorithme dans ce cas ? Interpréter.
3. Que renvoit l'algorithme pour $\varepsilon = 0,1$? $\varepsilon = 10^{-3}$?
4. Déterminer un entier p tel que $\forall n \geq p$, on ait :

$$-1-\varepsilon \leq u_n \leq -1+\varepsilon$$

5. Que vient-on de démontrer ?

Algorithme 6 :

Entrée(s) :
ε est un nombre réel strictement positif.
Variable(s) :
u est un nombre réel.
p est un nombre entier naturel.
Début
$u := 0$ et $p := 1$
Tant que ($u \notin]-1-\varepsilon ; -1+\varepsilon[$) **Faire**
$u := -1 + \dfrac{1}{p}$
p augmente de 1
Fin Tant que
Renvoyer $p-1$.
Fin

Exercice 19 : On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 3$

1. Conjecturer la limite ℓ de la suite u.
2. On donne l'algorithme ci-contre.
   a. Compléter la trace d'exécution de cet algorithme dans le tableau ci-dessous, avec l'entrée $A = 30$.

Test						
u						
p						

   b. Que renvoit l'algorithme dans ce cas ? Interpréter.
3. Que renvoit l'algorithme pour $A = 1000$? $A = 10^6$?
4. Déterminer un entier p tel que $\forall n \geq p$, on ait :

$$u_n > A$$

5. Que vient-on de démontrer ?

Algorithme 7 :

Entrée(s) :
A est un nombre réel strictement positif.
Variable(s) :
u est un nombre réel.
p est un nombre entier naturel.
Début
$u := -3$ et $p := 0$
Tant que ($u < A$) **Faire**
$u := p^2 - 3$
$p := p + 1$
Fin Tant que
Renvoyer $p-1$.
Fin

Exercice 20 : On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 - 3n$.
Rédiger un énoncé d'exercice sur le modèle des deux précédents, puis répondre à chacune des questions.