EXERCICES : VARIATIONS DE FONCTIONS (2^{eme} FICHE)

Exercice 1 : Résoudre graphiquement, en utilisant la droite des réels :

1. $|x-2|=3$
2. $|x+5|=|3-x|$
3. $|x-5|\leq|x+1|$

Exercice 2 : Un chien errant a été signalé sur une autoroute à moins de 3 km de la borne kilométrique 50, mais à plus de 5 km de la borne 54. On appelle x le réel qui repère la position du chien sur l'autoroute.

1. Traduire l'énoncé en utilisant des valeurs absolues.
2. Entre quelles bornes kilométriques de l'autoroute ce chien peut-il se trouver ?

Exercice 3 : Dans chacun des cas suivant, écrire f sans valeur absolue puis faire un schéma de sa représenation graphique :

1. $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$ sur $\mathbb{R}^*$
2. $f(x)=x|x|$ sur $\mathbb{R}$
3. $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ sur $\mathbb{R}^*$
4. $f(x)=|x|$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x|+|2x-4|$.

1. Déterminer, suivant les valeurs de x, l'expression de $|x|$, de $|2x-4|$, sans utiliser les valeurs absolues.
   En déduire l'expression de f en fonction de x, sans valeur absolue.
   On pourra présenter les résultats dans un tableau.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.
3. Résoudre l'équation $f(x)=3$.
4. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, d'unité graphique 1 cm.

Exercice 5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|3x|-|2x-2|+2-x$

1. Déterminer, suivant les valeurs de x, l'expression de f sans valeur absolue.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Résoudre l'inéquation $f(x)>4$, puis $f(x)\geq 4$.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.

Exercice 6 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=|x+3|+|2-x|$$

1. Ecrire, selon les valeurs de x, l'expression de $f(x)$ sans utiliser les valeurs absolues.
2. En déduire le tableau de variation de f.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)\leq 0$.

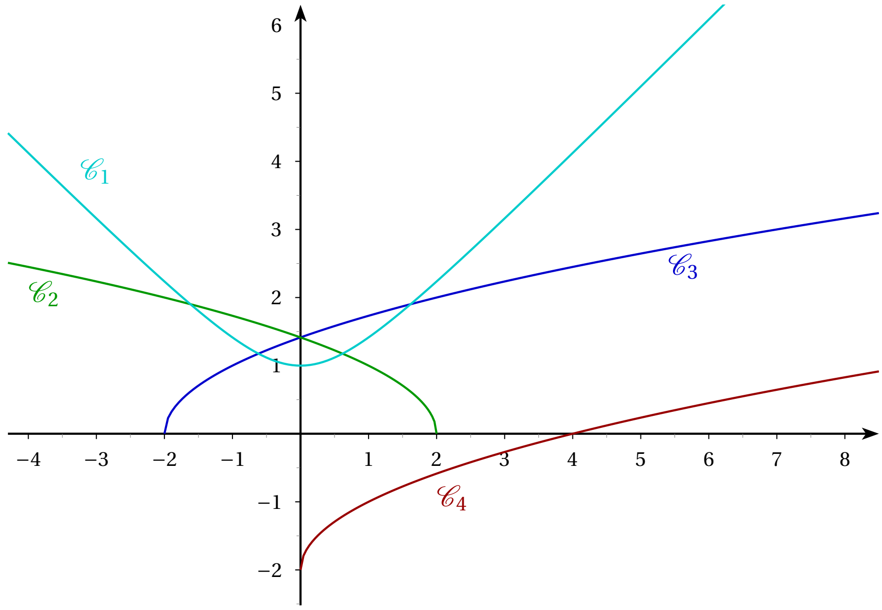
Exercice 7 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x-2|-\left|-\dfrac{3}{2}x+1\right|$.
On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère othonormal.

1. Pour $x\in\mathbb{R}$, exprimer $f(x)$ sans valeurs absolues, puis représenter graphiquement $\mathscr{C}_f$.
2. Résoudre l'équation $f(x)=12$.

Exercice 8 : On a représenté graphiquement dans un repère les fonctions f, g, h et k définies par :

- $f(x) = \sqrt{x+2}$
- $g(x) = \sqrt{2-x}$
- $h(x) = \sqrt{x} - 2$
- $k(x) = \sqrt{x^2+1}$

Associer à chacune de ces fonctions la représentation graphique qui lui correspond, **sans calculatrice**.



Exercice 9 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x-1$ ainsi que les fonctions g, h, k, l, m, n, p et q définies par :

- $g(x) = |f(x)|$
- $h(x) = f(|x|)$
- $k(x) = \sqrt{f(x)}$
- $l(x) = f\left(\sqrt{x}\right)$
- $m(x) = f^2(x)$
- $n(x) = f\left(x^2\right)$
- $p(x) = \dfrac{1}{f(x)}$
- $q(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Déterminer les tableaux de variation de toutes ces fonctions.

Exercice 10 : Dresser les tableaux de variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

1. $f : x \longmapsto \sqrt{5-2x^2}$
2. $f : x \longmapsto 1 - \dfrac{3}{\sqrt{x^2+5}}$
3. $f : x \longmapsto 2|x| - 6$
4. $f : x \longmapsto 6 - 2|x|$
5. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x-7)^2}$
6. $f : x \longmapsto |x^2 - 2|$
7. $f : x \longmapsto \left(\sqrt{-2x+4}\right)^2$
8. $f : x \longmapsto \sqrt{(-2x+4)^2}$
9. $f : x \longmapsto \dfrac{-5}{|3x-4|}$

Exercice 11 : **PARTIE A.** **Une fonction auxiliaire**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^2 + 4x + 5$$

1. Déterminer par la méthode de votre choix la forme canonique de g.
2. En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \geq 1$$
3. Dresser le tableau de variation de g

PARTIE B. **Etude d'une fonction composée**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$$

1. Expliquer pourquoi f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Etablir que la fonction f admet un minimum à préciser.

Exercice 12 : Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x-4\sqrt{x}+4$$

1. « g est la somme de fonctions monotones sur l'intervalle $[0;+\infty[$, elle est donc monotone sur cet intervalle. »
   Que penser de cette affirmation ?
2. Montrer que :
   $$\forall x\in[0;+\infty[,\quad g(x)=\left(\sqrt{x}-2\right)^2$$
3. En déduire les variations de la fonction g sur son ensemble de définition. [1]
4. La fonction g admet-elle un minimum ? Si oui lequel ?
5. Traduire en langage courant la proposition :
   $$\forall \mathrm{M}\geq 0, \exists x\in[0;+\infty[, g(x)\geq \mathrm{M}$$
   Démontrer cette proposition.
6. Quelle nouvelle information, relative au tableau de variations de la fonction f, cette proposition apporte-t-elle ?

Exercice 13 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par :

$$f(x)=\frac{x^2-5x+5}{x-3}$$

On souhaite étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ représentant f par rapport à la droite d d'équation $y=x-2$.

1. Montrer que $f(x)-(x-2)=-\dfrac{1}{x-3}$.
2. Etudier le signe de $-\dfrac{1}{x-3}$.
3. En déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite d.
4. Décrire la façon dont évolue la valeur de $f(x)-(x-2)$ lorsque x devient grand [2]
   Interpréter géométriquement ce phénomène.

1. On pourra utiliser les variations de f en raisonnant successivement dans l'intervalle $[0;4]$ puis dans l'intervalle $]4;+\infty[$
2. On pourra faire les calculs pour $x=10^2$, $x=10^3$ et $x=10^6$.