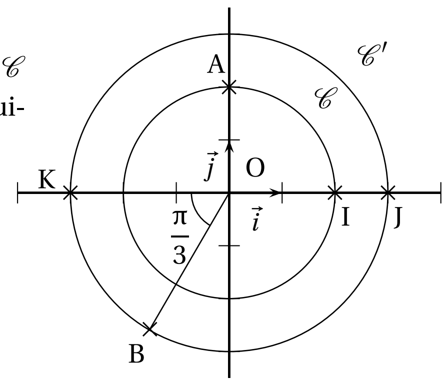
Exercices
Une nouvelle opération sur les vecteurs

Exercice 1 : Dans un repère orthonormal, les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(1;1)$, $(3;4)$ et $(3-k;-1)$ où k est un réel.

1. Déterminer le réel k afin que le triangle ABC soit rectangle en A.
2. Démontrer que le triangle ABC est alors isocèle en A.

Exercice 2 : Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, on a tracé deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centre O et de rayons respectifs 2 et 3. Calculer les produits scalaires suivants :



1. $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OJ}$
2. $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OK}$
3. $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OB}$
4. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$
5. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AI}$
6. $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IJ}$

Exercice 3 : Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$:

1. $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(-1;5)$
2. $\|\vec{u}\| = 1$; $\|\vec{v}\| = 2$; $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$ rad
3. $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 3$
4. $\|\vec{u}\| = 1$; $\|\vec{v}\| = 3$; $(\vec{u},\vec{v}) = 0$ rad
5. $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = 3$; $(\vec{u},\vec{v}) = \pi$ rad
6. Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormal : $\vec{u} = 2\vec{i}-3\vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{i}+2\vec{j}$

Exercice 4 : On prend le centimètre comme unité. Construire un triangle ABC tel que :

1. $AB = 3$, $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$
2. $AB = 3$, $AC = 6$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -9$

Exercice 5 : ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de [BC]. Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$
2. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CI}$
3. $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AI}$

Exercice 6 : Soit ABC un triangle et K le projeté orthogonal de A sur (BC). On donne $AB = 6$, $BK = 4$ et $KC = 7$

1. Calculer les produits scalaires suivants $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$.
2. Déterminer et représenter en rouge l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC} = 44$

Exercice 7 : On considère un segment [AB] et O son milieu. Soit Δ la médiatrice du segment [AB] et $M \in \Delta$. Montrer de deux manières différentes que :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}AB^2$$

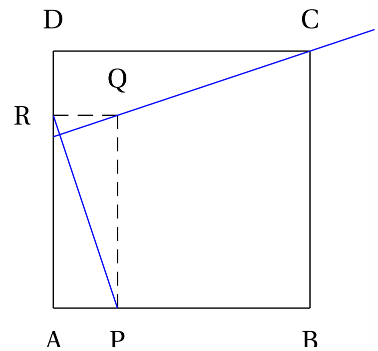
Exercice 8 : ABC est un triangle dans lequel $AB = 2$ et $AC = 3$. De plus $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4$
ABC est-il rectangle ? Si oui, préciser le sommet.

Exercice 9 : ABCD est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$.

Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$. En déduire BD.

Exercice 10 : Soit ABCD un carré, on construit un rectangle APQR tel que :

- P et R sont sur les côtés [AB] et [AD] du carré
- AP = DR



But : On souhaite montrer que les droites (PR) et (CQ) sont perpendiculaires

1. Montrer que : $\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{CQ} \cdot \left(\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP}\right)$
2. En déduire que les droites (PR) et (CQ) sont perpendiculaires.

Exercice 11 : $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon r et M un point non situé sur $\mathscr{C}$. Deux droites issues de M coupent $\mathscr{C}$ respectivement en A et B et en C et D

But : Montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$

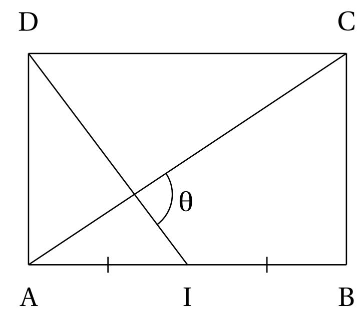
On note A′ le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$

1. Faire deux figures suivant que M est à l'intérieur ou à l'extérieur de $\mathscr{C}$
2. Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$
3. a. En utilisant la relation de Chasles, démontrer que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = MO^2 - r^2$
   b. En déduire que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$

Note

On montre ainsi que le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est indépendant de la sécante issue de M, il ne dépend que de la distance de M à O. Le réel $MO^2 - r^2$ (qui est nul lorsque M est un point de $\mathscr{C}$) est appelé **puissance de** M **par rapport à** $\mathscr{C}$. Il est positif lorsque M est à l'extérieur de $\mathscr{C}$ et négatif si M est à l'intérieur de $\mathscr{C}$

Exercice 12 : ABCD est un rectangle tel que AD = 3 et AB = 5. I est le milieu de [AB].



1. Calculer AC et DI.
2. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DI}$.
4. En déduire la valeur de l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{DI}; \overrightarrow{AC}\right)$ à 0,001 près en degrés.