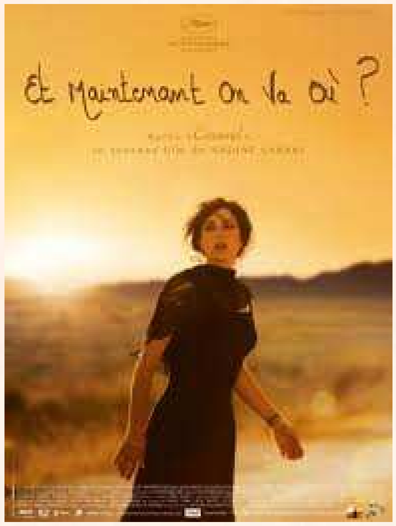
CHAPITRE 3

VARIATIONS DE FONCTIONS



HORS SUJET

TITRE : « Et maintenant on va où ? »
AUTEUR : NADINE LABAKI
PRÉSENTATION SUCCINTE DE L'AUTEUR : Nominé pour plusieurs prix « *Et maintenant on va où ?* » , de **Nadine Labaki**, a remporté le prix du Jury Oecuménique – Mention Spéciale à Cannes. Après « *Caramel* » , film déjà primé, la réalisatrice revient sur un thème extrêmement contemporain : la cohabitation religieuse.
Le film s'ouvre sur une scène originale, où, des femmes, drapées de noir, endeuillées, entament une danse esthétiquement précise et émotionnellement forte. Les femmes nous regardent comme si elles assistaient à un spectacle et que donc nous étions le film ce qui renforce l'aspect contemporain du sujet. Il s'agit des femmes d'un village, divisé en deux confessions avec d'un côté les musulmans regroupés derrière leur Cheikh, et de l'autre, les catholiques et leur Prêtre. Lors d'une soirée où ils sont tous regroupés devant la télévision, les habitants regardent le journal télévisé qui leur apprend des affrontements entre catholiques et musulmans. Dès lors, les tensions du passé sont ravivées et les hommes ne jurent plus que par leurs religions laissant les femmes abattues par cette situation, mais cherchant des solutions plus originales les unes que les autres pour garder la paix.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Connaître les représentations graphiques et les tableaux de variations des fonctions affines, polynôme de degré 2, inverse, racine carrée et valeur absolue.
- ⇝ La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissante) sur I est croissante (resp. décroissante) sur I.
- ⇝ u et $\frac{1}{u}$, sens de variation contraire.
- ⇝ u et $\sqrt{u}$ même sens de variation.

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

VARIATIONS DE FONCTIONS

Au fil du temps

Nous allons découvrir de nouvelles fonctions de référence : la fonction racine carré et la fonction valeur absolue. Vous connaissez déjà la fonction carré, la fonction inverse et les fonctions affines.
Au XVI^e siècle, le mathématicien allemand Christoff Rudolff est à l'origine de la notation $\surd$ dans un traité d'arithmétique. Il s'agit probablement d'un r minuscule déformé. En effet, r est la première lettre du mot « racine » en latin (« radix »). La notation se généralise en XVII^e, grâce notamment au mathématicien français René Descartes.
Karl Weirerstrass (1815-1987), mathématicien allemand considéré généralement comme l'un des plus grands mathématiciens du XIX^e, est à l'origine de la notaion $|x|$ pour la valeur absolue de x. Dans le premier chapitre, nous avons utilisé la fonction carré pour étudier plus généralement les fonctions polynômes de degré 2.
De même ici, nous nous appuieront sur les fonctions de référence pour généraliser des résultats sur d'autres fonctions.

I) Quelques rappels sur les fonctions

I.1. Variations

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 1.

On dit que f est strictement croissante si pour tous réels x et y de I rangés dans un certain ordre, leurs images $f(x)$ et $f(y)$ sont rangées dans le même ordre :

$$\forall x,\, y \in \mathrm{I}, \quad \text{on a } x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

Autrement dit, une fonction croissante conserve l'ordre.

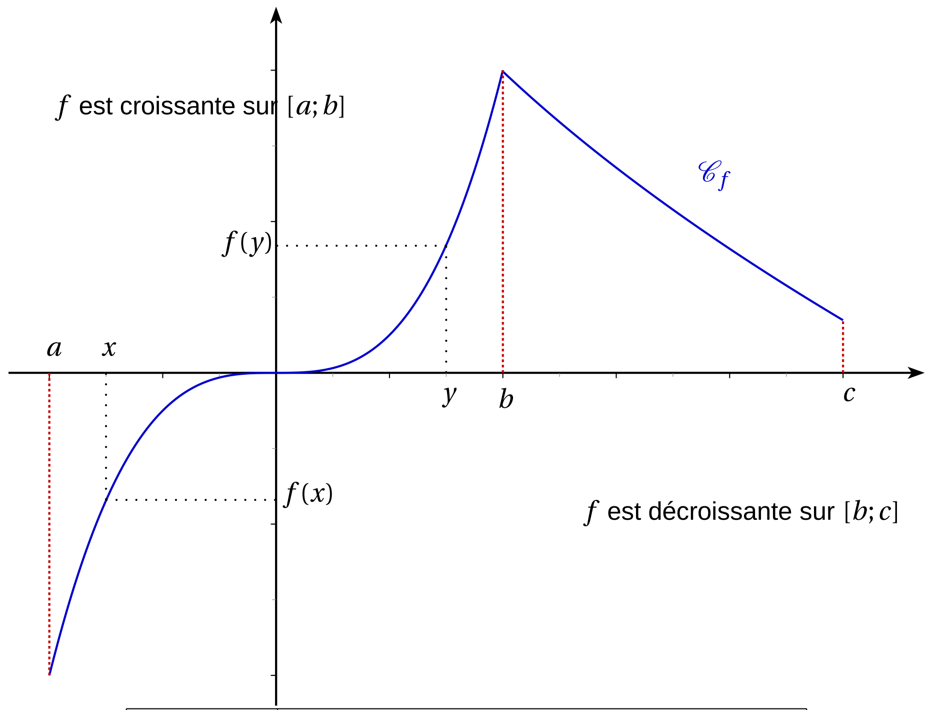
Remarques :

- On définit sur le même principe la stricte décroissance d'une fonction f :

$$\forall x,\, y \in \mathrm{I}, \quad \text{on a } x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$

- On parle de fonction **monotone** sur un intervalle I si celle-ci y est soit croissante, soit décroissante.
- On ne parle de sens de variation que sur un intervalle, les bornes ouvertes ou fermées ne jouant aucun rôle.
- On dit que f est constante si : $\forall x,\, y \in \mathrm{I}, \quad \text{on a } x < y \Longrightarrow f(x) = f(y)$
- La représentation graphique d'une fonction constante égale à k est une droite parallèle à l'axe des ordonnées d'équation $y = k$.
- On résume les variations d'une fonction dans un tableau (à ne pas confondre avec un tableau de signes).

Illustration graphique :



x	a		0		b		c
Variations	$f(a)$	↗	0	↗	$f(b)$	↘	$f(c)$
Signe		$-$	0	$+$		$+$	

Méthodes pour étudier le sens de variation d'une fonction f sur un intervalle I

- **Vues en seconde** :
  On pose x et y deux nombres quelconques de l'intervalle I tel que $x < y$.
  Ensuite on peut procéder de deux manières.
  ⇝ Soit par inégalités successives, on compare $f(x)$ et $f(y)$
  ⇝ Soit on calcule $f(y) - f(x)$ et on regarde son signe pour conclure.
- **Objectif de ce chapitre** :
  On se base sur les sens de variation de fonctions de référence et on utilise des règles sur les opérations de fonctions.

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On se propose de démontrer que cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

1. On considère deux nombres réels x et y, démontrer que $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
2. Déterminer alors le signe de $x^2 - y^2$ lorsque :

   a. x et y sont postifs. **b.** x et y sont négatifs.

3. Conclure.

I.2. Fonctions de référence apprises en seconde

Les résultats de cette partie sont déjà connus et ont déjà été démontrés en Seconde. Notamment pour ce qui concerne les variations des fonctions, les méthodes utilisées étaient celles décrites ci-dessus. Ainsi, nous nous contenterons de les rappeler et de revoir leurs applications.

I.2.a. Les fonctions affines

Dans toute cette partie, a et b désignent deux réels fixés.

Définition 2.

Les **fonctions affines** sont les fonctions f pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b$.

Exemple :

Trouver la fonction affine telle que $f(1) = 3$ et $f(-2) = -1$.

f est une fonction affine ce qui équivaut à dire que $\exists a, b \in$ R, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = ax + b$. En particulier, on a :

$$\begin{cases} f(1) = 5 \\ f(-2) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a \times 1 + b = 5 \\ -2a + b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 5 - a \\ -2a + (5 - a) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 5 - a \\ -3a = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

La fonction affine f vérifiant $f(1) = 5$ et $f(-2) = -1$ est $f : x \mapsto 2x + 3$.

Vérification : L'image de -2 par f est $f(-2) = 2 \times (-2) + 3 = -1$ et l'image de 1 est $f(1) = 2 \times 1 + 3 = 5$.

Propriété 1. (Définition)

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.

⇝ Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

⇝ Sa courbe représentative est une **droite** d'équation réduite est $y = ax + b$.
a est appelé le **coefficient directeur** et b l'**ordonnée à l'origine**.

⇝ $f(x) = 0 \iff ax + b = 0 \iff x - \dfrac{b}{a}$ et on a les tableaux suivants :

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Variations	↘	0	↘
Signe	$+$	0	$-$

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Variations	↗	0	↗
Signe	$-$	0	$+$

Exercice 1 :

1. Trouver la fonction affine telle que $f(4) = 0$ et $f(0) = 3$.
2. Etablir son tableau de variation, de signe et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
3. Où peut-on lire sur le graphique l'ordonnée à l'origine de la droite obtenue ?

4. Même question pour son coefficient directeur.

Solution :

1. $f(0) = 3$ donc $b = 3$.

   De plus $f(4) = 0 \iff a \times 4 + 3 = 0 \iff 4a = -3 \iff a = -\dfrac{3}{4}$.

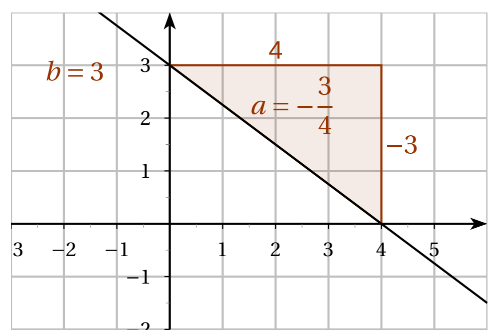
   Donc on trouve que $f(x) = -\dfrac{3}{4}x + 3$.

2. $f(x) = 0 \iff x = 4$ (donné dans l'énoncé) et $a > 0$.

   Donc on a le tableau :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
Variations	$\searrow$	0	$\searrow$
Signe	$+$	0	$-$

   On a la représentation graphique suivante :

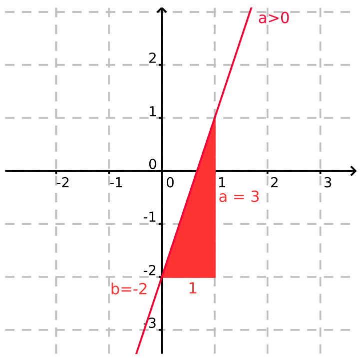


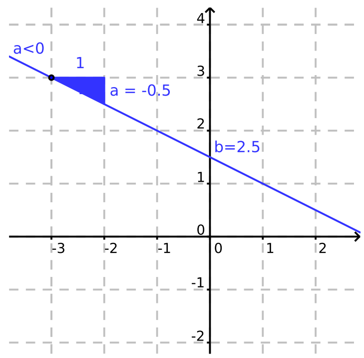
Proposition 1. (Interprétation graphique de a et b)

Soit $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}; y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}; y_\mathrm{B})$ deux points tels que $x_\mathrm{A} \neq x_\mathrm{B}$.
La droite (AB) admet pour coefficient directeur :

$$a = \frac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Il indique la direction, la pente de la droite (AB).
Quant à b, il s'agit de l'ordonnée du point de la droite (AB) d'abscisse $x = 0$.





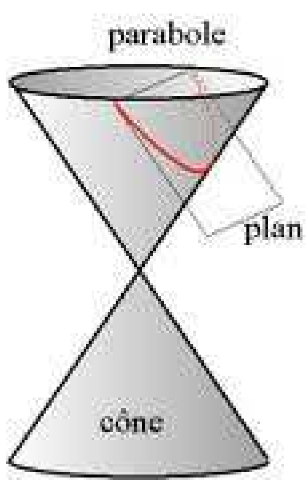
Exercice 2 :

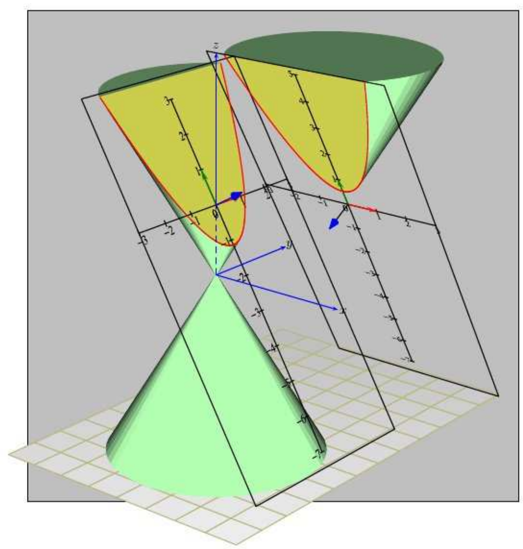
1. Trouver le coefficient directeur puis l'ordonnée à l'origine de la droite passant par $A(2;-1)$ et $B(3;5)$. En déduire l'expression de la fonction affine représentée par cette droite.
2. Même question pour les points $C(-1,2)$ et $D(3;-1)$.
3. Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites (AB) et (CD).

I.2.b. Fonctions polynôme de degré 2

Remarque : Culture

Depuis l'antiquité on étudie les paraboles. Il se trouve qu'elles sont les représentations graphiques des fonctions polynômes du second degré. Cependant les mathématiciens ne les connaissaient pas ainsi dans le passé, mais comme des formes géométriques obtenues par la section d'un cône infini avec un plan comme dans les schémas ci-dessous :





Raison pour laquelle les paraboles font partie de la famille des coniques.

Ces fonctions feront l'objet d'un chapitre entier cette année. Rappelons tout de même les résultats vus en seconde sur ces fonctions.

Dans toute cette partie, a, b et c désignent trois réels fixés, avec $a \neq 0$.

Définition 3.

Les fonctions polynôme de degré 2 sont les fonctions f pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + b + c$ avec $a \neq 0$.

Remarque : $f(x) = ax^2 + bx + c$ est la forme **développée** de la fonction polynôme f. Elle est pratique pour :
- ⇝ déterminer l'image de 0 : $f(0) = c$.
- ⇝ déterminer les antécédents éventuels de c :

$$f(x) = c \Longleftrightarrow ax^2 + bx = 0 \Longleftrightarrow x(ax+b) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b}{a}$$

Exercice 3 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)(x+2)$.

1. Démontrer que f est une fonction polynôme de degré 2.
2. Calculer l'image de 0 par f.
3. Déterminer les antécédents éventuels de -2 par f.
4. Déterminer les antécédents éventuels de 0 par f.

Propriété 2. (Définition)

Soit f une fonction polynôme de degré 2, définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- ⇝ Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
- ⇝ Sa courbe représentative est une **parabole** d'équation $y = ax^2 + bx + c$
- ⇝ Il existe deux réels α et β uniques tels que pour tout réel x on a $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
  On appelle cette écriture la **forme canonique** de f.
- ⇝ On a les tableaux suivants :

– Si $a > 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

– Si $a < 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Exemples :

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow\ 3x^2-24x+5 &= 3(x^2-8x)+5 \quad \text{(on a factorisé les termes en } x^2 \text{ et } x \text{ par } a=3\text{)}\\
&\ \text{On reconnaît que } x^2-8x \text{ est le début de la forme développée de } (x-4)^2=x^2-8x+16\\
&\ \text{Donc} \quad x^2-8x=(x-4)^2-16 \quad \text{et on remplace dans l'expression :}\\
3x^2-24x+5 &= 3\left((x-4)^2-16\right)+5\\
&= 3(x-4)^2-43\\
\rightsquigarrow\ x^2+3x+5 &= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+5 \quad \text{car} \quad \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=x^2+3x+\frac{9}{4} \iff x^2+3x=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\\
&= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\\
\rightsquigarrow\ -2x^2-2x &= -2(x^2-x) \quad \text{on factorise les termes en } x^2 \text{ et } x \text{ par } a=-2\\
&= -2\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right) \quad \text{car} \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x^2-x+\frac{1}{4} \iff x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\\
&= -2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Remarques :

⇝ Le premier intérêt de la forme canonique est d'établir le tableau de variations de la fonction f.

⇝ Le second intérêt est de trouver l'éventuelle **forme factorisée** de f : $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, et donc ses éventuelles racines x_1 et x_2 (ie les x tels que $f(x)=0$).
En effet, si a et β sont de même signe, f sera de signe constant (celui de a et β) et ne s'annulera pas.
Par contre, si a et β sont de signes différents, on peut changer l'écriture de f en utilisant une identité remarquable. Observons cela sur les exemples précédents.

Exemple :

$$f(x)=3x^2-24x+5=3(x-4)^2-43=\left(\sqrt{3}(x-4)-\sqrt{43}\right)\left(\sqrt{3}(x-4)+\sqrt{43}\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc} \quad f(x)=0 &\iff \sqrt{3}(x-4)-\sqrt{43}=0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{3}(x-4)+\sqrt{43}=0\\
&\iff x\sqrt{3}=4\sqrt{3}+\sqrt{43} \quad \text{ou} \quad x\sqrt{3}=4\sqrt{3}-\sqrt{43}\\
&\iff x=\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{43}}{\sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad x=\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{43}}{\sqrt{3}}\\
&\iff x=\frac{12+\sqrt{129}}{3} \quad \text{ou} \quad x=\frac{12-\sqrt{129}}{3}
\end{aligned}$$

On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{12-\sqrt{129}}{3}$		4		$\frac{12+\sqrt{129}}{3}$		$+\infty$
Variations		↘	0	↘	-43	↗	0	↗	
Signe		$+$	0		$-$		0	$+$	

Exemples :

Faire de même avec les autres fonctions de l'exemple :

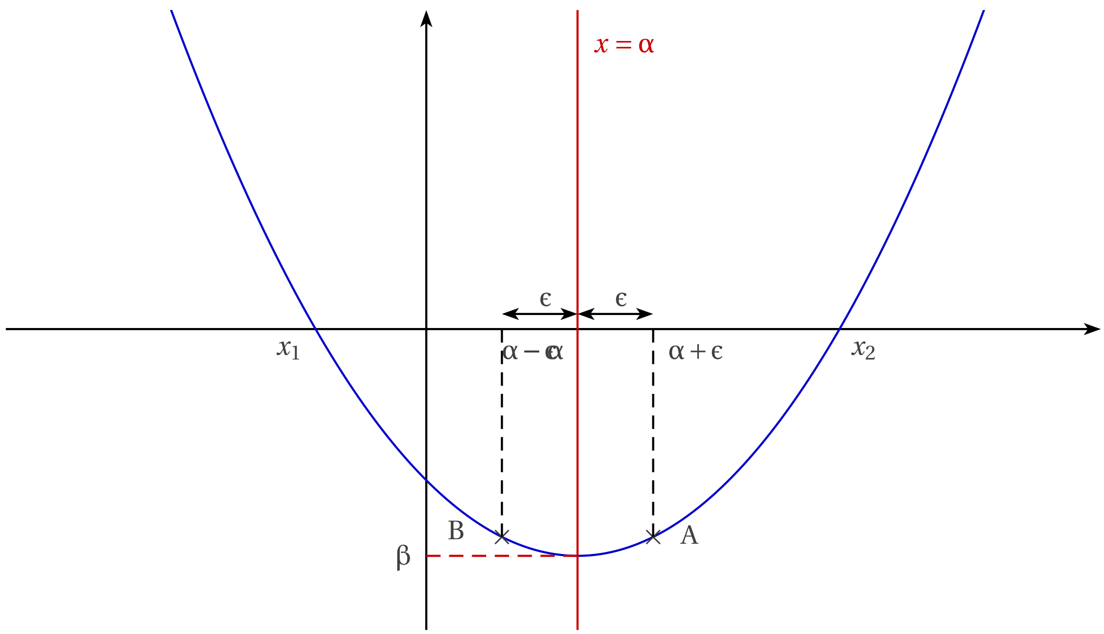
$$g(x) = x^2 + 3x + 5 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} \qquad h(x) = -2x^2 - 2x = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

Propriété 3.

Soit f une fonction polynôme de degré 2 et $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ sa forme canonique. La parabole représentative de f admet la droite verticale d'équation $x = \alpha$ comme axe de symétrie.

Preuve

Ce résultat n'ayant peut-être pas été démontré en Seconde, prouvons le, en nous appuyant sur un dessin.



Soit $A(x_A; f(x_A))$ un point de la parabole $\mathscr{P}$. Il existe alors $\epsilon \in \mathbb{R}$ tel que $x_A = \alpha + \epsilon$.
Alors $y_A = f(\alpha+\epsilon)) = a(\alpha+\epsilon-\alpha)^2 + \beta = a\epsilon^2 + \beta$. Donc $A(\alpha+\epsilon; a\epsilon^2+\beta)$.
Pour montrer que $\mathscr{P}$ admet la droite $x = \alpha$ pour axe de symétrie, il suffit de montrer que le point $B(\alpha-\epsilon; a\epsilon^2+\beta)$ est aussi sur $\mathscr{P}$, ie que $f(\alpha-\epsilon) = a\epsilon^2+\beta$.
Or $f(\alpha-\epsilon)) = a(\alpha-\epsilon-\alpha)^2 + \beta = a\epsilon^2 + \beta = y_B$.
Donc B appartient bien à $\mathscr{P}$ et $x = \alpha$ est un axe de symétrie de $\mathscr{P}$.

Remarque : Ceci permet d'avoir une autre méthode pour retrouver la forme canonique d'une fonction polynôme f de degré 2 à partir de sa forme développée.

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 24x + 5$.
Pour trouver α, il nous faut deux points de la parabole ayant la même ordonnée.
Or la forme développée nous permet de résoudre facilement l'équation $f(x) = 5$, qui a deux solutions et nous donnera donc deux points comme voulu.

$$f(x) = 5 \iff 3x^2 - 24x = 0 \iff 3x(x-8) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 8$$

Donc les points $\text{A}(0;5)$ et $\text{B}(8;5)$ sont sur la parabole et ont la même ordonnée.
Grâce à l'axe de symétrie de la parabole $x = \alpha$, on sait que $\alpha = \dfrac{0+8}{2} = 4$ (moyenne des abscisse de A et B).
De plus, on sait que le sommet de la parabole a pour coordonnées $(\alpha;\beta)$ donc $\beta = f(\alpha)$.
Donc on calcule $f(4) = 3 \times 4^2 - 24 \times 4 + 5 = 3 \times 16 - 92 + 5 = -43$
Et $f(x) = 3(x-4)^2 - 43$. On retrouve bien les valeurs précédentes !

Exercice 4 : Dans chacun des cas suivants, construire le tableau variations de f, trouver ses éventuelles racines, compléter le tableau par une ligne décrivant le signe de f, puis contrôler les résultats à la calculatrice.

1. $f(x) = 4(x+2)^2 - 5$ **2.** $f(x) = -3(x-1)^2 + 9$ **3.** $f(x) = 2x^2 + 1$ **4.** $f(x) = 7\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$

Exercice 5 : Dans chacun des cas suivants, retrouver la forme canonique de la fonction f.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 2$ **2.** $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ **3.** $f(x) = 3x^2 - 12x - 1$ **4.** $f(x) = -3x^2 + 12 + 1$

I.2.c. La fonction inverse

Définition 4.

La fonction inverse est la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriété 4. (Définition)

- L'ensemble de définition de la fonction inverse est : $]-\infty;0[\,\cup\,]0;+\infty[$
- Sa courbe représentative est une **hyperbole**.
- On a le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations	$\searrow$	‖	$\searrow$
Signe	$-$	‖	$+$

II) Deux nouvelles fonctions de référence

II.1. La fonction « racine carré »

Travail de l'élève **1.** Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

1. Etude des variations

a. Construire la représentation graphique de f sur l'écran de la calculatrice.
Conjecturer le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$.

b. Démontrer que, quels que soient les réels a et b tels que $0 \leq a < b$, on a :

$$f(b)-f(a)=\frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$$

En déduire le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$.
Dresser son tableau de variations.

2. Etude de la courbe représentative

a. Démontrer que, pour tous réels x et y, les points $\mathrm{M}(x;y)$ et $\mathrm{M}'(y;x)$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$.

b. Dans un même repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j})$, construire la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f, et la courbe $\mathscr{P}$, représentative de la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=x^2$

c. Démontrer que $\mathrm{M}(x;y)\in\mathscr{C}$ équivaut à $\mathrm{M}'(y;x)\in\mathscr{P}$

d. Que peut-on en déduire pour les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$?

Définition 5 :

On appelle fonction racine carrée la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x}$.

Propriété 5 :

- L'ensemble de définition de la fonction racine carré $\mathbb{R}^+$.
- La courbe presentative de la fonction racine carré et la courbe représentative de la fonction carré sur $[0;+\infty[$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.
- On a le tableau suivant

x	0	$+\infty$
Variations	0 $\nearrow$	
Signe	$+$	

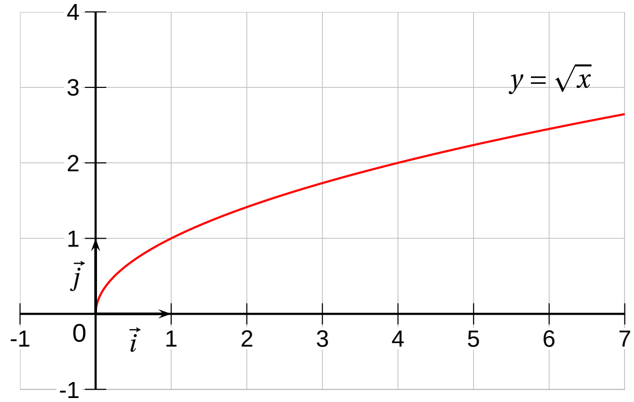
La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Preuve

Cf Activité.

Remarque : D'après le tableau de variations, la fonction racine carrée admet pour minimum 0 sur $\mathbb{R}^+$, atteint en 0.

Représentation graphique dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:



Exercice 6 **:**

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x+4}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur son ensemble de définition.

II.2. Croissance comparée

***Travail de l'élève* 2.**

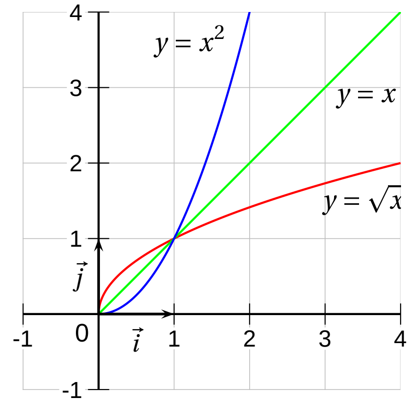
1. Ecrire un algorithme qui lit un nombre x positif et qui affiche alors dans l'ordre croissant x^2 et x.
2. Même question pour x et $\sqrt{x}$.
3. Conjecturer en fonction de x, l'ordre des nombres x^2, x et $\sqrt{x}$.
4. Etudier en fonction de x le signe de x^2-x.
5. Même question pour $x-\sqrt{x}$.
6. Conclure sur la validité de votre conjecture.
7. En déduire la position relative des courbes représentatives des fonctions f, g et h définies par $f(x)=x^2$, $g(x)=x$ et $h(x)=\sqrt{x}$.

Propriété 6 :

Si $x=0$ ou $x=1$ alors $x^2=x=\sqrt{x}$.
Si $0<x<1$ alors $x^2<x<\sqrt{x}$.
Si $x>1$ alors $x^2>x>\sqrt{x}$.

Proposition 2 :

On appelle respectivement $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ les courbes représentatives des fonctions $f:x\longmapsto x^2$, $g:x\longmapsto x$ et $h:x\longmapsto\sqrt{x}$ sur $[0;+\infty[$.
Les points de coordonnées $(0;0)$ et $(1;1)$ sont communs aux trois courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$.
Sur l'intervalle $]0;1[$: la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$, elle-même en dessous de la courbe $\mathscr{C}_h$.
Sur l'intervalle $]1;+\infty[$: la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$, elle-même au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_h$.



Exemples :

Ranger dans l'ordre les nombres suivants :

1. π, π^2 et $\sqrt{\pi}$
2. $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi^2}{16}$ et $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 7 **:**

Donner le signe de la fonction Φ définie sur $[0;+\infty[$ par $\Phi(x) = \sqrt{x} - x^2$

Exercice 8 **: Challenge**

1. Donner le tableau de signes de la fonction Ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\Psi(x) = x^{n+1} - x^n$, en fonction de n.
2. En déduire celui de la fonction ξ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\xi(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}} - \dfrac{1}{x^n}$, en fonction de n.

II.3. La fonction « valeur absolue »

Travail de l'élève **3.** Activité « Soif d'absolu » p 9 du livre Repère

4. En considérant successivement la fonction valeur absolue sur les intervalle $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, déterminer le sens de variation de cette fonction.
   En déduire son tableau de variations.

5. Comparer $|x|$ et $|-x|$.
   Quelle propriété sur la courbe représentative de la fonction valeur absolue peut-on en déduire ?

Définition 6 :
La distance entre deux réels x et y est la distance, sur une droite graduée, entre les points d'abscisssses x et y. On la note $d(x;y)$.

Exemples :

$d(5;3)=2$, $d(-4;-1)=3$ et $d(3;-2)=5$.

Définition 7 :

On appelle fonction valeur absolue la fonction qui à tout réel x associe sa distance à 0. On note $f(x)=|x|$.

Exemples :
$|5|=5$, $|-2|=2$, $|0|=0$,
$|3-\pi|=-(3-\pi)=\pi-3$ car $3-\pi<0$,
$|2-\sqrt{2}|=2-\sqrt{2}$ car $2-\sqrt{2}>0$.

Remarques :
⇝ La fonction valeur absolue peut se définir explicitement ainsi :

$$|x|=\begin{cases} x & \text{Si } x\geq 0 \\ -x & \text{Si } x\leq 0 \end{cases}$$

⇝ La valeur absolue d'un nombre est toujours positive.
⇝ Pour tous réels x et y on a $d(x;y)=|x-y|$.

Exemple :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|2x+3|$.

1. Ecrire pour tout $x\in\mathbb{R}$ la fonction f sans valeur absolue.
2. Représenter graphiquement cette fonction dans un repère orthonormé.

Propriété 7 :

- La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$.
- Sa courbe représentative est formé par deux demi-droites. Elle est symétrique par rapport à l'axe (Oy).
- On a le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations	$\searrow$	0	$\nearrow$
Signe		$+$	

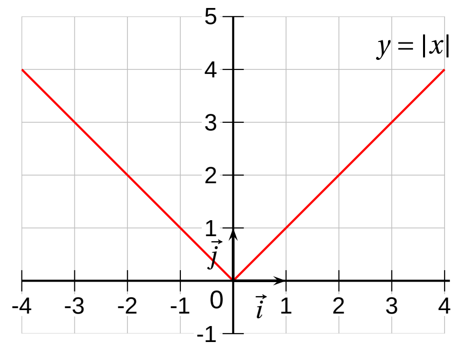
La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty:0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Preuve

Cf Activité.

Remarque : D'après le tableau de variations, la fonction valeur absolue admet pour minimum 0 sur $\mathbb{R}$, atteint en 0.

Représentation graphique dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:



Propriété 8 :

Soient x et y deux réels.

1. $|-x| = |x|$
2. $|x| = |y| \iff x = y$ ou $x = -y$
3. $\sqrt{x^2} = |x|$
4. $|xy| = |x| \times |y|$
5. Si $y \neq 0$ on a $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
6. Par contre : $|x+y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)

Preuve

Revenir à la définition avec la distance à 0 et les abscisses de points. Penser à distinguer les cas que $x = 0$.

Propriété 9 :
Soient x un réel et k un réel positif.

1. $|x| = k \iff x = k$ ou $x = -k$
2. $|x| \leq k \iff -k \leq x \leq k$
3. $|x| > k \iff x > k$ ou $x < k$

Exemples :
Résoudre analytiquement les équations suivantes :

$|x-7| = 3$ $\quad |y+4| = 6$ $\quad |2x-7| = 8$ $\quad |x-1| = -4$

Résoudre analytiquement les inéquations suivantes :

$|x-7| \leq 3$ $\quad |y+4| < 6$ $\quad |2x-7| > 8$

Propriété 10 :
Soient a et x deux réels, et k un réel positif ou nul. Les assertions suivantes sont équivalents :

1. $|x-a| = k$
2. $d(x;a) = k$
3. $a-k \leq x \leq a+k$
4. $x \in [a-k; a+k]$

Exemples :

Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes $f_1 : x \mapsto |1+2x|$ et $f_2 : x \mapsto |2x+3|+|x|$ définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 **:**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |3x| - |2x-2| + 2 - x$

1. Etudier les variations de f
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.

Exercices du livre : Repère

n° 87 à 90 p 38 + 92 à 94 p 38

III) Variations et opérations sur les fonctions

III.1. Opérations sur les fonctions

Travail de l'élève **4.** On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 0.5x^2 - 3x + 2.5$. Avec la calculatrice, on souhaite comparer les variations de u avec certaines fonctions associées à u. On pose k un réel.

1. Fonction u :

a. Tracer sur votre calculatrice la courbe représentative de la fonction u.

b. Etablir le tableau de variations de la fonction u.

2. **Fonction $u+k$:**
Soit v_k la fonction définie par $v_k(x) = u(x)+k$.
   - **a.** Comparer l'ensemble de définition de v_4 et celui de u.
   - **b.** Tracer à la calculatrice la courbe représentative de la fonction v_4 et celle de u.
   - **c.** Comment peut-on obtenir la courbe de v_4 à partir de celle de u ?
   - **d.** En déduire le tableau de variations de la fonction v_4.
   - **e.** Reprendre les questions $2.a$ à $2.d$ avec d'autres valeurs de k.
   - **f.** Conjecturer les relations entre l'ensemble de définition d'une fonction f et celui d'une fonction g de la forme $f+k$, ainsi que les relations entre leurs variations.
3. **Fonction ku :**
On suppose que $k \neq 0$. On appelle w_k la fonction définie par $w_k(x) = ku(x)$.
   - **a.** Comparer l'ensemble de définition des fonctions w_2, $w_{0.5}$, w_{-1} et w_{-3} avec celui de u.
   - **b.** Tracer à la calculatrice les courbes représentatives de ces fonctions et celle de u.
   - **c.** Comparer les variations de ces fonctions avec celles de u.
   - **d.** Conjecturer le tableau de variations de la fonction w_k en distinguant deux cas.
   - **e.** Conjecturer les relations entre l'ensemble de définition d'une fonction f et celui d'une fonction g de la forme kf, ainsi que les relations entre leurs variations.

Dans tout ce paragraphe, u désigne une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ et k une constante.

Définition 8 :

- ⇝ La fonction $u+k$ est la fonction qui à chaque réel $x \in \mathscr{D}$ associe le réel $u(x)+k$
- ⇝ La fonction ku est la fonction qui à chaque réel $x \in \mathscr{D}$ associe le réel $ku(x)$

Proposition 3 :

Soit I un intervalle de $\mathscr{D}$ sur lequel u est monotone.

- ⇝ Les fonctions u et $u+k$ ont le même sens de variation sur I.
- ⇝ Si $k>0$, les fonctions u et ku ont le même sens de variation sur I, sinon des sens contraires.

Preuve

⇝ Si u est croissante sur I : on pose deux réels a et b de I tels que $a<b$. Alors on a :

$$\begin{aligned} a<b &\iff u(a)<u(b) \quad \text{car } u \text{ conserve l'ordre sur I}\\ &\iff u(a)+k<u(b)+k \end{aligned}$$

Donc la fonction $u+k$ est croissante sur I.
De même, si u est décroissante sur I, on pose a et b sont deux réels de I tels que $a<b$. Alors :

$$\begin{aligned} a<b &\iff u(a)>u(b) \quad \text{car } u \text{ inverse l'ordre sur I}\\ &\iff u(a)+k>u(b)+k \end{aligned}$$

Donc la fonction $u+k$ est décroissante sur I.
D'où, u et $u+k$ ont le même sens de variation sur I (et donc, les mêmes variations sur $\mathscr{D}$).

⇝ Si u est croissante sur I : on pose deux réels a et b de I tels que $a<b$. Alors on a :

$$\begin{aligned} a<b &\iff u(a)<u(b) \quad \text{car } u \text{ conserve l'ordre sur I}\\ &\iff ku(a)<ku(b) \quad \text{si } k>0 \quad \text{ou} \quad ku(a)>ku(b) \quad \text{si } k<0. \end{aligned}$$

Donc la fonction ku est croissante sur I si $k>0$, décroissante sinon.
De même, si u est décroissante sur I, on pose a et b sont deux réels de I tels que $a<b$. Alors :

$$\begin{aligned} a<b &\iff u(a)>u(b) \quad \text{car } u \text{ inverse l'ordre sur I}\\ &\iff ku(a)>ku(b) \quad \text{si } k>0 \quad \text{ou} \quad ku(a)<ku(b) \quad \text{si } k<0. \end{aligned}$$

Donc la fonction ku est décroissante sur I si $k>0$, croissante sinon.
D'où, les fonctions u et ku ont le même sens de variation sur I si $k>0$, sinon des sens contraires (ce qui donc se généralise sur $\mathscr{D}$).

Exemples :

Etablir le tableau de variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

⇝ $f : x \longmapsto 3-\sqrt{x}$
⇝ $g : x \longmapsto 10-0.5x^2$
⇝ $h : x \longmapsto 2|x|-6$
⇝ $k : x \longmapsto 6-2|x|$

Remarque : Sur le même principe de démonstration, on peut constater que :
⇝ une somme de fonctions croissantes sur un intervalle I est une fonction croissante sur I,
⇝ une somme de fonctions décroissante sur I est une fonction décroissante sur I.
⇝ par contre, on n'a pas de règle pour une somme de fonction de sens de variation différents sur I.

Qu'en est-il du produit ?

III.2. Composée de fonction

***Travail de l'élève* 5.** On considère la fonction u de l'activité précédente (définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=0.5x^2-3x+2.5$). On appelle v la fonction définie par $v(x)=\sqrt{u(x)}$ et w la fonction définie par $w(x)=\dfrac{1}{u(x)}$.

1. Donner les ensembles de définition de v et w.
2. Tracer sur votre calculatrice les courbes représentatives des fonctions u, v et w.
3. Conjecturer le tableau de variations des fonctions v et w.

4. Soit J un intervalle sur lequel une fonction f est positive ou nulle.
   Conjecturer les relations entre les variations de f et celles d'une fonction g de la forme $\sqrt{f}$ sur J.
5. Soit K un intervalle sur lequel une fonction f ne s'annule pas.
   Conjecturer les relations entre les variations de f et celles d'une fonction h de la forme $\dfrac{1}{f}$ sur K.

Dans ce paragraphe, u désigne une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}_u$ de $\mathbb{R}$, positive ou nulle, et v une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}_v$ de $\mathbb{R}$, qui ne s'annule pas.

Définition 9 :

- La fonction $\sqrt{u}$ est la fonction qui à chaque réel $x \in \mathscr{D}_u$ associe le réel $\sqrt{u(x)}$.
- La fonction $\dfrac{1}{v}$ est la fonction qui à chaque réel $x \in \mathscr{D}_v$ associe le réel $\dfrac{1}{v(x)}$

Proposition 4 :

- Soit J un intervalle de $\mathscr{D}_u$ sur lequel u est monotone.
  Les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont le même sens de variation sur J.
- Soit K un intervalle de $\mathscr{D}_v$ sur lequel v est monotone et ne change pas de signe.
  Les fonctions v et $\dfrac{1}{v}$ ont des sens de variation contraires sur K.

Preuve

- Si u est croissante sur J : on pose deux réels a et b de J tels que $a < b$. Alors on a :

$$\begin{aligned} a < b &\implies 0 \leq u(a) < u(b) \quad \text{car } u \text{ conserve l'ordre sur J et est positive ou nulle} \\ &\implies 0 \leq \sqrt{u(a)} < \sqrt{u(b)} \text{ car la fonction racine carré conserve l'ordre sur } \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

  Donc la fonction $\sqrt{u}$ est croissante sur J.
  De même, si u est décroissante sur J, on pose a et b deux réels de J tels que $a < b$. Alors :

$$\begin{aligned} a < b &\implies u(a) > u(b) \geq 0 \quad \text{car } u \text{ inverse l'ordre sur J} \\ &\implies \sqrt{u(a)} > \sqrt{u(b)} \geq 0 \text{ car la fonction racine carré conserve l'ordre sur } \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

  Donc la fonction $\sqrt{u}$ est décroissante sur J.
  D'où, u et $\sqrt{u}$ ont le même sens de variation sur J.

- Si v est croissante et strictement positive sur K : on pose deux réels a et b de K tels que $a < b$. Alors on a :

$$\begin{aligned} a < b &\implies 0 < v(a) < v(b) \quad \text{car } v \text{ conserve l'ordre sur K et est strictement positive} \\ &\implies \frac{1}{v(a)} > \frac{1}{v(b)} > 0 \quad \text{car la fonction inverse change l'ordre sur } \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

  Donc la fonction $\dfrac{1}{v}$ est décroissante sur K.

Preuve (Suite)

De même, si v est décroissante sur K, on pose a et b deux réels de K tels que $a < b$. Alors :

$$\begin{aligned} a<b &\implies v(a)>v(b)>0 && \text{car } v \text{ inverse l'ordre sur K et est strictement positive} \\ &\implies 0<\frac{1}{v(a)}<\frac{1}{v(b)} && \text{car la fonction inverse change l'ordre sur } \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Donc la fonction $\dfrac{1}{v}$ est croissante sur K.

D'où, les fonctions v et $\dfrac{1}{v}$ ont des sens de variation contraires sur K.

On procède exactement de même si v est strictement négative sur K, car la fonction inverse change aussi l'ordre sur $\mathbb{R}^-$.

Exemple :

Etablir le tableau de variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

- $\rightsquigarrow$ $\Phi : x \longmapsto \sqrt{3-x}$
- $\rightsquigarrow$ $\Psi : x \longmapsto 2-5\sqrt{1-4x}$
- $\rightsquigarrow$ $\varepsilon : x \longmapsto \dfrac{4}{7-3x}$
- $\rightsquigarrow$ $\theta : x \longmapsto 3-\dfrac{2}{x^2+1}$

Exercice 10 :

Donner sur $[0;+\infty[$ les variations de f définie par $f(x)=1-\dfrac{3}{\sqrt{x^2+5}}$

Exercices du livre : Repère

n° 95 à 99 + 101-103 p 38

DM : n° 102 p 41 légèrement modifé (notion de limite et d'asymptote)