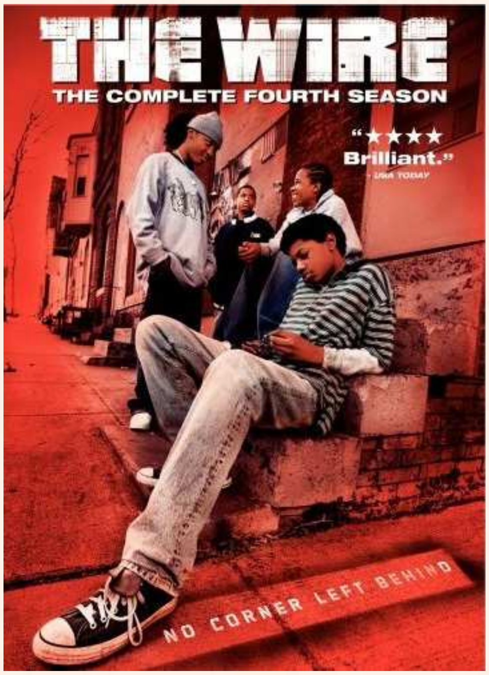
Chapitre 2

Trigonométrie

Hors Sujet



Titre : « The Wire »
Auteur : David Simon
Présentation succinte de l'auteur : Sur écoute (The Wire) est une série télévisée américaine, créée par David Simon et Ed Burns.

Elle a pour sujet la criminalité dans la ville de Baltimore, à travers la vision de ceux qui la vivent au quotidien : policiers, trafiquants en tous genres, politiques, enseignants, journalistes, résidents de Baltimore, etc.

Avec un aspect de quasi-documentaire par son réalisme et son non-manichéisme, la série est acclamée par la critique, bien qu'elle n'ait pas connu un succès commercial important. Elle est souvent considérée comme la meilleure série télévisée jamais diffusée à la télévision, et l'une des fictions les plus abouties dans les années 2000, notamment pour sa représentation réaliste quasi littéraire de la vie urbaine, et son exploration profonde des thèmes socio-politiques de l'Amérique.

Le tour de force de la série est de s'engager, sur le plan social, en montrant sans détour les pans les plus sombres du décor américain, son revers le plus inavouable, tout en mettant en scène une multitude de points de vue réalistes qui multiplient les questions dérangeantes sans jamais proposer de solution miracle. Il n'y a pas de fausse objectivité rassurante et pas de subjectivité accusatrice sous-jacente, l'épisode ne fait que montrer le plus passivement possible, il en résulte un étrange bourdonnement qui persiste longtemps après sa diffusion.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

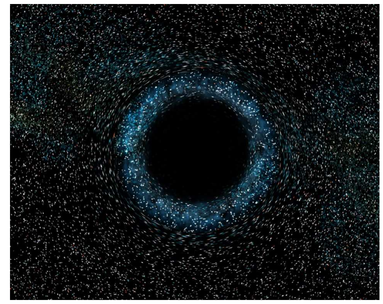
Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Se repérer sur le cercle trigonométrique
- ⇝ Déterminer la mesure principale d'un angle
- ⇝ Utiliser les notations d'angle de vecteurs
- ⇝ Connaître la définition du cosinus et du sinus d'un nombre réel
- ⇝ Connaître les valeurs du cosinus et sinus des angles remarquables
- ⇝ Utiliser le cercle trigonométrique pour déterminer des angles associés, leur cosinus et sinus, résoudre des (in)équations trigonométriques

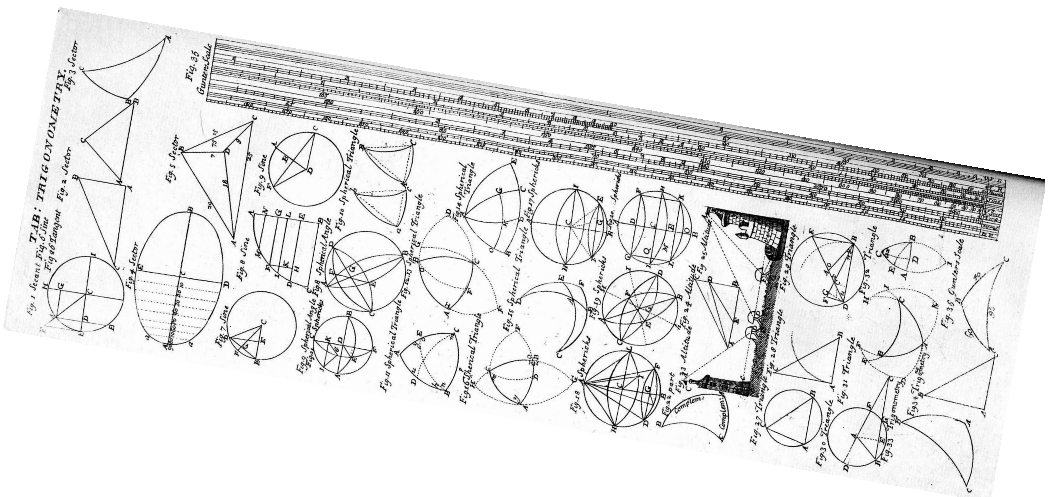
« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

TRIGONOMÉTRIE



Au fil du temps

Les origines de la trigonométrie remontent aux civilisations d'Égypte antique, de Mésopotamie et de la vallée de l'Indus, il y a plus de 4000 ans. Il semblerait que les Babyloniens aient basé la trigonométrie sur un système numérique à base 60. Lagadha (-1350 ; -1200) est le premier mathématicien à utiliser la géométrie et la trigonométrie pour l'astronomie. La plupart de ses travaux sont aujourd'hui détruits. La première utilisation de sinus apparaît dans les sulba Sutras en Inde, entre 800 et 500 avant J.C., où le sinus de $\frac{\pi}{4}$ est correctement calculé comme $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dans un problème de construction d'un cercle de même aire qu'un carré donné (le contraire de la quadrature du cercle).



Lorsque qu'on cherche une rue sur un plan de ville, on repère le rectangle où se trouve cette rue grâce à une lettre qui définit une colonne et un nombre qui définit une ligne du quadrillage sur le plan. Les marins ou les géographes repèrent un point sur la Terre grâce à sa longitude et sa latitude. Les astronomes ont besoin, eux, de trois mesures pour repérer un objet spatial, par exemple deux angles définissant une direction et une distance caractérisant l'éloignement de l'objet sur la direction. Le repérage est donc indispensable dès lors qu'on cherche à définir la position d'un objet dans un espace. Les repères que nous avons utilisé jusqu'à présent sont dit cartésiens, adjectif créé en hommage à Descartes (1596 - 1650) mathématicien et philosophe français qui inventa en même temps que Fermat (1601 - 1665) mais indépendamment de lui, le système de coordonnées que nous utilisons couramment. Les repères cartésiens utilisés jusqu'à présent permettent de positionner des points dans un plan. Ils peuvent être complétés par une troisième coordonnée permettant de se repérer dans l'espace à trois dimensions. Ces repères ne sont pourtant pas les seuls permettant de positionner des objets, nous allons découvrir dans ce chapitre comment se repérer sur un plan avec un angle et un rayon : grâce aux coordonnées polaires.

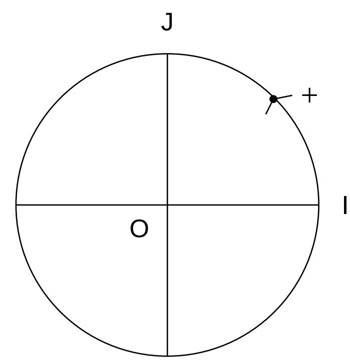
I) Le cercle trigonométrique

I.1. Repérage d'un point sur le cercle

Une unité de longueur est choisie dans le plan.

Définition 1.

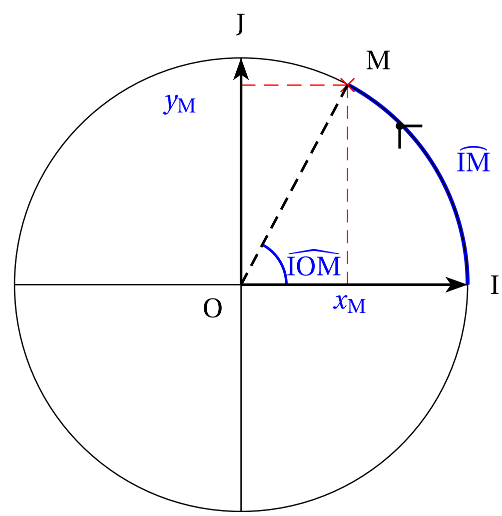
Un cercle de rayon 1, munit d'un sens de rotation, sur lequel est fixé un point « d'origine I » est appelé cercle trigonométrique.



Pour tout le chapitre, on utilisera les éléments de la figure ci-dessus. Ainsi :
- ⇝ on notera $\vec{i} = \overrightarrow{\mathrm{OI}}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{\mathrm{OJ}}$
- ⇝ le plan est muni du repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessus
- ⇝ $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O et d'origine I (donc de rayon 1, et orienté positivement)

Repérage d'un point sur le cercle

Il y a trois manières de repérer un point M sur un cercle :
- ⇝ Par ses coordonnées dans le repère $(\mathrm{O}; \vec{i}; \vec{j})$
- ⇝ Par la mesure de l'angle orienté $\widehat{\mathrm{IOM}}$
- ⇝ Par la mesure de l'arc orienté $\widehat{\mathrm{IM}}$



Remarque : Nous allons établir un lien entre ces trois manières de repérer un point sur le cercle trigonométrique.

I.2. Enroulement de la droite des réels

<u>Travail de l'élève</u> **1.** Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) comme sur la figure vidéo-projetée.
On considère le **cercle trigonométrique** $\mathscr{C}$ de centre O.
On rappelle qu'un cercle trigonométrique est **un cercle de rayon** 1**, orienté, sur lequel on a fixé une « origine ».**
Ici, $\mathscr{C}$ a donc pour rayon $OI = 1$ (unité graphique), son sens de parcours (sens direct) est indiqué l'inverse de celui des aiguilles d'une montre et on choisit comme origine I.
On appelle $\mathscr{D}$ la droite numérique (ou **droite des réels**), tangente à $\mathscr{C}$ en I et muni du repère $(I, \overrightarrow{OJ})$. Autrement dit, $\mathscr{D}$ est graduée dans la même unité que le plan et dirigée vers le « haut ».
Le point I restant fixé, on « enroule » ensuite $\mathscr{D}$ sur le cercle $\mathscr{C}$.
En tenant compte de l'orientation de l'enroulement, on associe alors à tout réel :

- $\rightsquigarrow$ $t > 0$ le point M de $\mathscr{C}$ tel que $\widehat{IM} = t$,
- $\rightsquigarrow$ $t < 0$ le point M de $\mathscr{C}$ tel que $\widehat{IM} = -t$.

*On dira qu'à tout réel t, on associe le point $M \in \mathscr{C}$ tel que $\widehat{IM} = |t|$ (**se dit valeur absolue de** t).*

1. **a.** Faire un schéma du cercle vidéo-projeté, sur lequel vous placerez au mieux les points correspondants aux entiers de -3 à 9.

   b. Que constatez-vous ?

   c. Donner trois réels positifs et un négatifs correspondants au point I sur $\mathscr{C}$. Même question pour J.

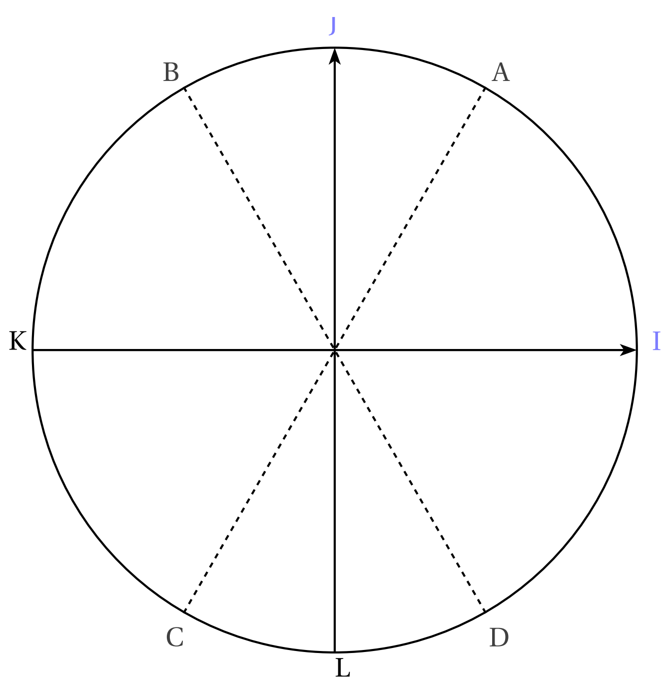
2. Tracer un nouveau cercle trigonométrique, d'unité graphique 4cm et placer sur le cercle les points associés aux réels t suivants :

   a. $0\ ;\quad \pi\ ;\quad 2\pi\ ;\quad -\pi\ ;\quad 3\pi\ ;\quad -5\pi$

   b. $\dfrac{\pi}{2}\ ;\quad \dfrac{3\pi}{2}\ ;\quad -\dfrac{\pi}{2}\ ;\quad \dfrac{5\pi}{2}\ ;\quad \dfrac{7\pi}{2}$

   c. $\dfrac{\pi}{4}\ ;\quad -\dfrac{\pi}{4}\ ;\quad \dfrac{3\pi}{4}\ ;\quad -\dfrac{3\pi}{4}\ ;\quad \dfrac{11\pi}{4}\ ;\quad -\dfrac{15\pi}{4}$

3. On considère le cercle trigonométrie suivant, partagé en 6 « parts » égales.



   a. Déterminer deux réels positifs et deux réels négatifs associés aux points A, B, C et D.

   b. Quels sont les points associés aux réels $\dfrac{9\pi}{3}\ ;\quad \dfrac{4\pi}{3}\ ;\quad \dfrac{25\pi}{3}\ ;\quad -\dfrac{7\pi}{3}\ ;\quad \dfrac{-25\pi}{3}$?

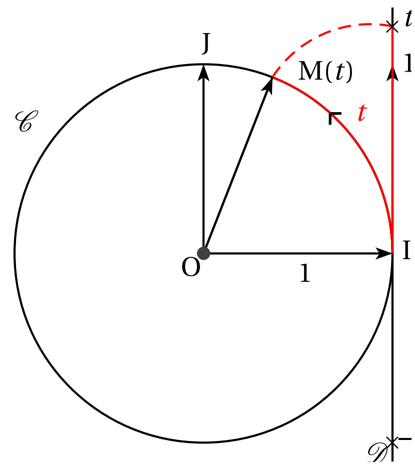
   c. Quelles sont les longueurs des arcs $\widehat{IA}$, $\widehat{IB}$, $\widehat{IC}$ et $\widehat{ID}$?

Propriété 1 :

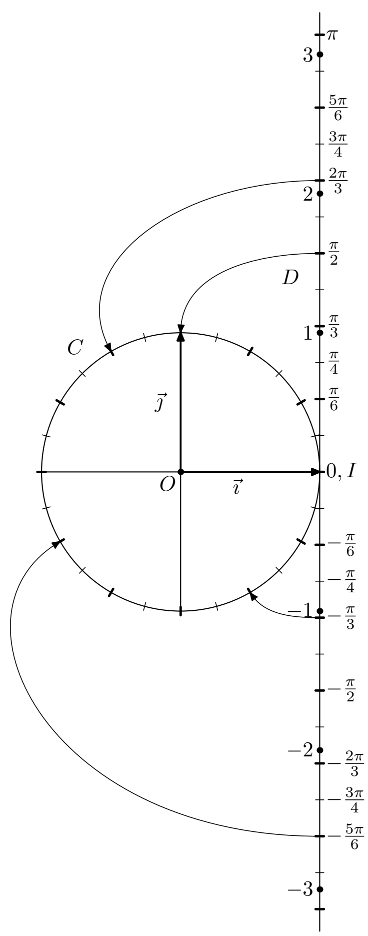
A chaque réel t, on associe le point M de $\mathscr{C}$ tel que $\widehat{\mathrm{IM}} = |t|$ (valeur absolue de t), selon le principe de l'enroulement de la droite des réels décrit dans l'activité.
Tout point M de $\mathscr{C}$ est associé à une infinité de réels.
Si t est l'un d'entre eux, les autres sont les réels $t + k \times 2\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
Autrement dit, pour tout réel t et tout entier relatif k, les points $\mathrm{M}(t)$ et $\mathrm{M}(t+2k\pi)$ sont confondus sur $\mathscr{C}$.

Preuve

Un point M de $\mathscr{C}$ est notamment associé au réel t tel que $\widehat{\mathrm{IM}} = |t|$.
Comme le périmètre du cercle $\mathscr{C}$ vaut $2\pi\mathrm{R} = 2\pi$, le point M est aussi associé aux réels de la forme $t + 2k\pi$.



Remarque : Le point d'abscisse $t + 2\pi$ de la droite $\mathscr{D}$ se retrouve aussi sur le point M, c'est aussi le cas du point d'abscisse $t - 2\pi$ ou encore $t + 4\pi$, etc ...



Remarque : On peut désormais décrire la position d'un point M sur le cercle en donnant l'un des réels qui lui sont associés ou encore la longueur de l'arc $\widehat{\mathrm{IM}}$, cependant ce n'est pas la manière la plus simple ...

I.3. Le Radian

Travail de l'élève **2.**

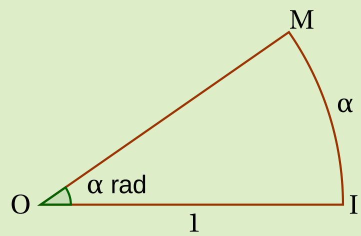
1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$ direct, tracer le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O et d'origine I.
2. Placer au mieux sur $\mathscr{C}$ les points K, L, A, B et C, respectivement associés aux réels π, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$.
3. Quelles sont les longueurs des arcs $\overset{\frown}{IJ}$, $\overset{\frown}{IK}$, $\overset{\frown}{IA}$, $\overset{\frown}{IB}$ et $\overset{\frown}{IC}$?
4. Et les mesure en degré des angles $\widehat{IOJ}$, $\widehat{IOK}$, $\widehat{IOA}$, $\widehat{IOB}$ et $\widehat{IOC}$?
5. Que constatez-vous ?

En profiter pour expliquer aux élèves comment placer précisément les angles remarquables, ainsi que leurs angles associés.

Définition 2.

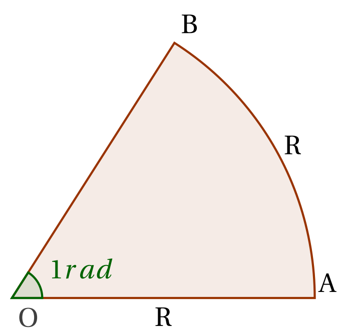
Soit A le point de $\mathscr{C}$ associé au réel 1. On définit le radian (symbole rad) comme la mesure de l'angle $\widehat{IOA}$ ainsi construit.

Ainsi, la mesure d'un angle $\widehat{IOM}$ en radians est la longueur de son arc associé $\overset{\frown}{IM}$.



Remarques :

- Au collège, le degré comme unité d'angle convenait parfaitement, même pour la trigonométrie (dans un triangle rectangle). Mais pour mettre en oeuvre des notions qui seront abordées dans les classes ultérieures, il est plus pratique d'utiliser désormais le radian.
- Cette définition ne dépend pas de l'unité de longueur choisie. En fait, dans un cercle de rayon R, 1 radian est la mesure d'un angle qui intercepte un arc de longueur égale au rayon R.



Propriété 2.

Les mesures d'angles en degrés et en radians sont proportionnelles.

Preuve

Les longueurs d'arc sont proportionnelles aux angles en degrés.

Exemples :

Le périmètre de $\mathscr{C}$ valant 2π, on en déduit facilement qu'un angle plat mesure π radians ; un angle droit $\frac{\pi}{2}$ rad.
Avec le tableau de proportionnalité suivant, on trouve convertit n'importe quelle mesure.

Mesure en degrés	180	d
Mesure en radians	π	α

Ainsi pour convertir 60° en radian on calcule $\alpha = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ rad.

Pour convertir $\frac{5\pi}{6}$ rad en degré, on calcule $d = \frac{\frac{5\pi}{6} \times 180}{\pi} = \frac{5 \times 180}{6} = 5 \times 30 = 150^\circ$
Ou encore on remplace π par 180 dans la mesure d'angle ...

Correspondance degré-Radian

mesure en degrés	O	30	45	60	90	180	270	360
mesure en radians	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	$\frac{3\pi}{2}$ rad	2π

Exercice 1 :

1. Convertir en radians les mesures d'angles exprimées en degrés : 72°, 105°, 50° et 44°
2. Convertir en degrés les mesures d'angles exprimées en radians : $\frac{7\pi}{24}$, $-\frac{5\pi}{18}$, $\frac{\pi}{9}$ et $-\frac{2\pi}{5}$

Remarque : On pourrait désormais décrire la position d'un point M sur le cercle en donnant la valeur de l'angle $\widehat{IOM}$, cependant, sans précision supplémentaire, nous aurions le choix entre deux points M ...
Il devient donc important de préciser un « sens » pour les angles . On utilise bien sûr le même que celui du cercle.

Exemple :

Par exemple, les réels $\frac{3\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ sont les mesures d'un même angle orienté en radians.
Donner d'autres exemples.
Les réels $\frac{7\pi}{5}$ et $-\frac{13\pi}{5}$ sont-ils des mesures d'un même angle orienté en radians ?

Exercice(s) du livre : Repère : n° 54-50 p 289

I.4. Mesure Principale d'un angle en radian

Travail de l'élève **3.**

1. **a.** Les réels $\frac{13\pi}{4}$ et $-\frac{31\pi}{4}$ sont-ils des mesures d'un même angle orienté en radians ?

b. Même question pour les réels $\frac{2011\pi}{6}$ et $\frac{4023\pi}{6}$

c. Ecrire un algorithme qui demande deux réels a et b et qui teste s'il s'agit de la mesure d'un même angle orienté en radian.

2. Soit r un nombre rationnel. On pose $a = r\pi$.

a. Donner une méthode de calcul permettant de déterminer la mesure dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ de l'angle correspondant à a en radians.

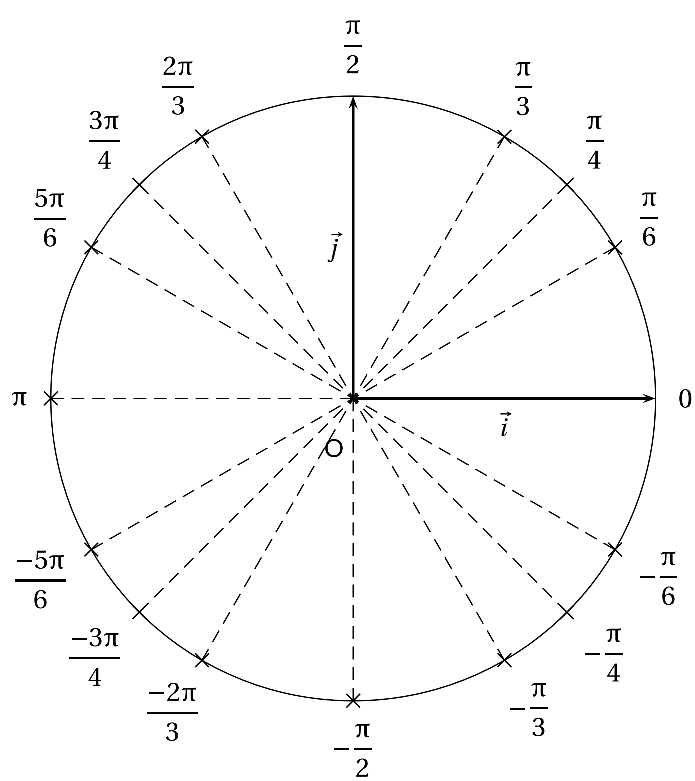
b. Ecrire un algorithme associé à cette méthode.

c. Programmer cet algorithme.

Propriété 3. (Définition)

Un angle en radian admet une infinitée de mesure mais une seule qui appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$, on dit qu'il s'agit de la **mesure principale** d'un angle en radian.

Ci-dessous, quelques mesures principales d'angles en radians sur le cercle trigonométrique (à connaître) :



Exemple :

Considérons le point A sur le cercle trigonométrique associé au réel $t = \frac{13\pi}{4}$.
En plaçant A sur le cercle on peut facilement trouver la mesure principale de l'angle en radian.
Ici, il s'agit de $\frac{13\pi}{4} - 4\pi = -\frac{3\pi}{4}$.

Ou encore, on encadre $\frac{13}{4}$ entre deux entiers consécutifs (l'un des deux sera forcément pair) : $3 < \frac{13}{4} < 4$

On en déduit un encadrement de $\frac{13\pi}{4}$ par deux multiples consécutifs de π : $3 < \frac{13}{4} < 4 \iff 3\pi < \frac{13\pi}{4} < 4\pi$

Ici, on sait donc que la mesure principale de l'angle $\frac{13\pi}{4}$ sera dans l'intervalle $]-\pi;0]$.
On trouve ainsi le demi-cercle sur lequel se situe A, sans avoir à la dessiner.

Or, si t est un angle en radians, tout réel du type $t + 2k\pi$ mesure le même angle.
De l'inégalité précente on déduit donc que $\frac{13\pi}{4}$ désigne le même angle que $\frac{13\pi}{4} - 4\pi = -\frac{3\pi}{4}$.
On enlève (ou en ajoute) toujours à la mesure de l'angle le multiple de 2π trouvé dans l'inégalité.

En fait, toutes les mesures d'un même angle s'obtiennent en ajoutant $2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. On note alors :

$$\frac{13\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$$ (on lit « modulo 2π »)

Exercice 2 : Sans calculatrice, dire si les réels suivants sont des mesures principales en radians d'angles orientés

$\frac{7\pi}{5}$ $\quad -\frac{13\pi}{5}$ $\quad \frac{\pi}{4}$ $\quad -\frac{3\pi}{4}$ $\quad \frac{3\pi}{2}$ $\quad -\frac{2\pi}{3}$ $\quad -\frac{7\pi}{6}$ $\quad \frac{37\pi}{36}$

Exercice(s) du livre : Repère : n° 45-48 p 288

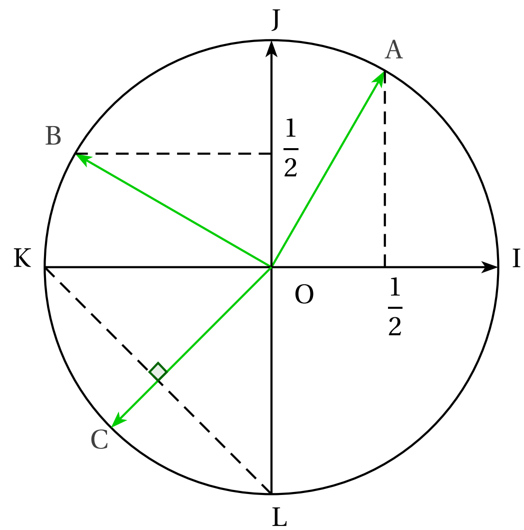
II) Les angles de vecteurs non nuls

On conserve les notations précédentes. De plus, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs non nuls.

II.1. Définition

***Travail de l'élève* 4.**

On donne la figure ci-contre :



1. Déterminer sur la figure ci-contre des réels associés à chacun des points.

L'enroulement de la droite des réels permet de définir des mesures pour les couples de vecteurs unitaires (ie de norme 1) :

Si M et N sont deux points de $\mathscr{C}$, associés aux réels m et n respectivement, on définit une mesure du couple $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right)$ par la différence $n-m$.

Il s'agit en fait ici de la mesure en radians de l'angle orienté $\widehat{MON}$.

2. Appliquer cette définition pour en déduire des mesures de couples de vecteurs suivants :

a. $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)$ **d.** $\left(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OA}\right)$ **g.** $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$ **j.** $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)$

b. $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)$ **e.** $\left(\overrightarrow{OK};\overrightarrow{OB}\right)$ **h.** $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$ **k.** $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)$

c. $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}\right)$ **f.** $\left(\overrightarrow{OK};\overrightarrow{OC}\right)$ **i.** $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)$ **l.** $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}\right)$

Que constatez-vous ?

3. Déterminer désormais des mesures des angles suivants :

a. $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{OB}\right)$ **d.** $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{BO}\right)$ **g.** $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{BO}\right)$

b. $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{OC}\right)$ **e.** $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{AO}\right)$ **h.** $\left(\overrightarrow{CO};\overrightarrow{AO}\right)$

c. $\left(\overrightarrow{CO};\overrightarrow{OB}\right)$ **f.** $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{BO}\right)$ **i.** $\left(\overrightarrow{CO};\overrightarrow{BO}\right)$

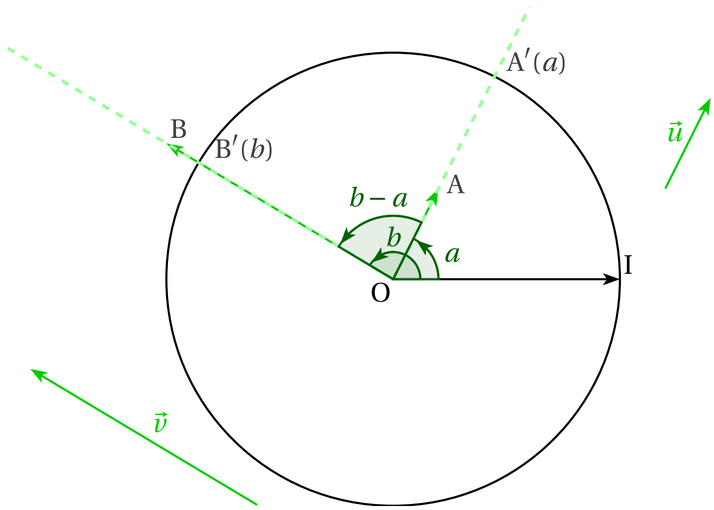
Que constatez-vous ?

4. On souhaite étendre la définition d'angle de vecteurs unitaires à des vecteurs non unitaires.
A votre avis, combien mesure les angles suivants :

a. $\left(\overrightarrow{KL};\overrightarrow{OC}\right)$ **b.** $\left(\overrightarrow{KL};\overrightarrow{OA}\right)$ **c.** $\left(\overrightarrow{KL};\overrightarrow{OB}\right)$

Définition 3. (Angle orienté de vecteurs)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
On appelle A et B les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, avec O le centre du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, et A′ et B′ les points d'intersection des demi-droites [OA) et [OB) avec $\mathscr{C}$.
Si A′ est associé au réel a et B′ est associé au réel b, alors $b-a$ est une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$.



Remarques :

- Une mesure de $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ est en fait une mesure en radians de l'angle orienté $\widehat{AOB}$
  On peut ainsi se passer aisément du cercle trigonométrique pour déterminer des mesures d'angle de vecteur.
- Désormais nous distinguerons angle géométrique (toujours positif, noté avec un « chapeau ») et angle orienté (dont le signe dépend de l'orientation du plan, noté souvent comme une angle de vecteurs)
- On a évidemment :

$$(\vec{u};\vec{v}) = (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'}) = (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB'})\ldots$$

Exemple :

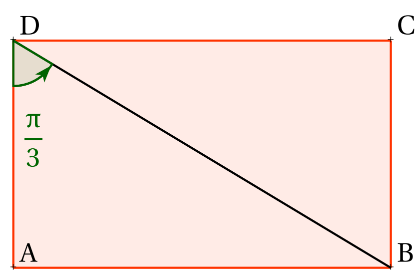
On a la figure suivante, où ABCD est un rectangle direct.

Angles géométriques

$$\widehat{ADB} = \widehat{BDA} = \frac{\pi}{3}$$

$$\widehat{ADC} = \widehat{CDA} = \frac{\pi}{2}$$

$$\widehat{BDC} = \widehat{CDB} = \frac{\pi}{6}$$



Angles orientés

$(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA}) = -\frac{\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}) = \frac{\pi}{3}$

$(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}) = -\frac{\pi}{2}$ et $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{2}$

$(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}) = -\frac{\pi}{6}$

Donner des mesures des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$; $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})$; $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CD})$

Définition 4.

Un angle de vecteurs a une infinité de mesures, mais une unique dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$, appelée sans surprise **mesure principale**.

Exemple :

Sur la figure de l'exemple précédent on aurait pu écrire :

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = \frac{11\pi}{6} \qquad \text{ou encore} \qquad (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = \frac{-13\pi}{6}$$

Toutes les mesures s'obtiennent en ajoutant $2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. On note alors, toujours sans surprise :

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi] \qquad \text{(on lit « modulo } 2\pi \text{ »)}$$

Exercice 3 : MNP est un triangle équilatérale direct, ie tel que $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = +\frac{\pi}{3}$ et I est le milieu de $[NM]$.
Faire un schéma de la situation puis lire graphiquement une mesure de chacun des angles ci-dessous :

$$(\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PM}) \qquad (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PN}) \qquad (\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{MP}) \qquad (\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PI})$$

Exercice 4 : ABCD est un carré de centre O direct, ie que si on tourne autour du carré sur son cercle circonscrit dans le sens direct, on trouve dans l'ordre nommés les sommets, ou encore on a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = +\frac{\pi}{2}$.
Faire un schéma de la situation puis lire graphiquement :

1. Deux mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
2. les mesures principales des angles

$$(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}) \qquad (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OB}) \qquad (\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{AC}) \qquad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC}) \qquad (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD})$$

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AD}) \qquad (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) \qquad (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) \qquad (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CO})$$

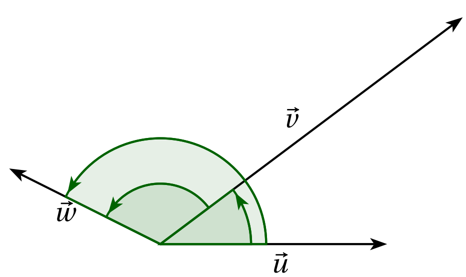
II.2. Propriétés

Propriété 4. (Relation de Chasles, admise)

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls. On a :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) \quad [2\pi]$$

Illustration :



Exemple :
Sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O, munie du repère orthonormée $(0, \mathrm{I}, \mathrm{J})$, les points A et B sont tels que :

$$\widehat{\mathrm{IOA}} = 45° \qquad \text{et } \widehat{\mathrm{IOB}} = -120°$$

Donner une mesure en radians des angles orientés :

1. $(\overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}})$ **2.** $(\overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}})$ **3.** $(\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}})$

Corollaire 1.

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous k et k' non nuls et de même signe, on a :

1. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) \quad [2\pi]$

2. $(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \pi \quad [2\pi]$
$(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \pi \quad [2\pi]$

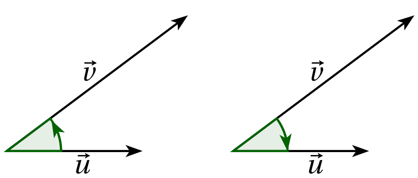
3. $(k\overrightarrow{u}, k'\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \quad [2\pi]$

4. $(-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \quad [2\pi]$

<u>Illustrations de cas particuliers</u> :

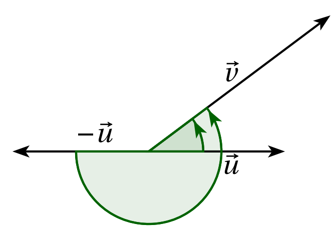
Angles Opposés :

$(\vec{u}; \vec{v}) = -(\vec{v}; \vec{u}) \quad [2\pi]$



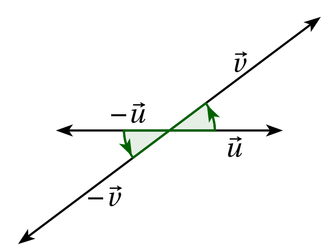
Angles supplémentaires :

$(-\vec{u}; \vec{v}) = (\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi \quad [2\pi]$



Angles égaux :

$(-\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) \quad [2\pi]$



<u>Preuve</u> **avec la relation de Chasles, mais relativement évidente avec la définition**

1. D'après la relation de Chasles on a : $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{u}) \quad [2\pi]$
Or $(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \quad [2\pi]$ D'où : $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = 0 \quad [2\pi]$, et finalement :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) \quad [2\pi]$$

2. D'après la relation de Chasles on a : $(-\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = (-\vec{u}, \vec{u}) \quad [2\pi]$
Or $(-\vec{u}, \vec{u}) = \pi \quad [2\pi]$ D'où : $(-\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = \pi \quad [2\pi]$, et finalement :

$$(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \pi \quad [2\pi]$$

On procède de même pour montrer que $(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \pi \quad [2\pi]$

Preuve (Suite)

3. En utilisant deux fois la relation de Chasles on a :

$$(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (k\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}; k'\vec{v}) \quad [2\pi]$$

Cas 1 : k et k' sont positifs
Dans ce cas, les vecteurs $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens et donc : $(k\vec{u}, \vec{u}) = 0 \quad [2\pi]$.
De même $(\vec{v}; k'\vec{v}) = 0 \quad [2\pi]$, et donc :

$$(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) \quad [2\pi]$$

Cas 2 : k et k' sont négatifs
Dans ce cas, les vecteurs $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ n'ont pas le même sens et donc : $(k\vec{u}, \vec{u}) = \pi \quad [2\pi]$.
De même $(\vec{v}; k'\vec{v}) = \pi \quad [2\pi]$, et donc :

$$\begin{aligned}(k\vec{u}, k'\vec{v}) &= 2\pi + (\vec{u}, \vec{v}) \quad [2\pi] \\ &= (\vec{u}, \vec{v}) \quad [2\pi]\end{aligned}$$

4. On applique la propriété précédente pour $k = -1$

Exemple :

Sachant que $(\vec{u}; \vec{v}) = \dfrac{3\pi}{4}$, déterminer la mesure principale de : $(2\vec{u}; \vec{v})$ $(-\vec{v}; 2\vec{u})$ $(3\vec{v}; -2\vec{u})$

Exemple :

ABC est un triangle de sens direct (ie que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est de mesure positive).
Démontrer que la somme de ses angles orientés est égales à π.

Solution :

Notons θ la somme des trois angles dans le sens direct. On a :

$$\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

Comme $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) \quad [2\pi]$, on peut écrire :

$$\theta = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \quad [2\pi] \iff \theta = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}) \quad [2\pi] = \pi \quad [2\pi]$$

Remarque : On peut désormais décrire la position d'un point M sur le cercle grâce à la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$.

Exercice 5 : ABCD est un carré tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{2}$
AEB et BCF sont des triangles équilatéraux tels que $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) = \dfrac{\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FB}) = \dfrac{\pi}{3}$
On se propose de démontrer que les points D, E et F sont alignés en utilisant les angles orientés

1. Faire un schéma de la situation.
2. **a.** Démontrer que le triangle ADE est isocèle

   b. Démontrer que $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) = \dfrac{5\pi}{12}$

3. Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF})$ et en déduire une mesure de $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EF})$

4. **a.** Utiliser la relation de Chasles pour calculer une mesure de $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})$

b. Que peut-on en déduire sur les points D , E et F ?

Exercice 6 : A, B, C et D sont des points tels que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{12} \quad [2\pi]$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{5\pi}{12} \quad [2\pi]$.
Démontrer que ACD est rectangle.

Exercices du livre : Repère

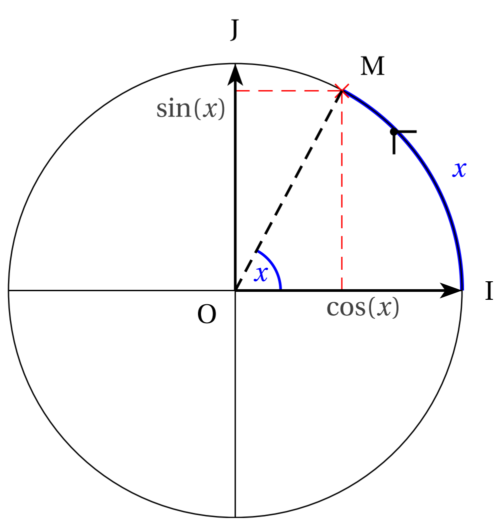
n° 59 p 289 (figures)
n° 65-66 p 289 (propriétés)

III) La trigonométrie

III.1. Définition du cosinus et sinus d'un nombre réel et d'un angle orienté

Définition 5.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et M son point associé sur le cercle $\mathscr{C}$.
On appelle **cosinus** de x, noté $\cos(x)$ l'abscisse de M dans le repère $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$.
On appelle **sinus** de x, noté $\sin(x)$ son ordonnée dans le même repère.
Le cosinus et le sinus d'un angle orienté sont le cosinus et sinus d'une quelconque de ses mesures.



Remarques :

- On vérifie aisément que cet définition coïncide avec celle donnée dans le triangle rectangle pour un angle θ tel que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.
- On dispose désormais d'une troisème méthode pour décrire la position d'un point M sur le cercle $\mathscr{C}$.

Exemple :

Le nombre réel $\frac{\pi}{2}$ est associé au point J de coordonnées $(0,1)$ dans le repère $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$.
Donc $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

Propriété 5 : *Immédiates*

Pour tout nombre réel x on a :

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$\cos(x+2k\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x+2k\pi) = \sin(x) \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \text{(Pythagore)}$$

Remarque : On dispose désormais d'une troisème méthode pour décrire la position d'un point M sur le cercle $\mathscr{C}$.

Exemple :

On donne $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. On cherche la valeur de $\sin\frac{\pi}{12}$.

On sait que $\cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12} = 1 \iff \sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$ Donc

$$\sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{6+2\sqrt{12}+2}{16} = \frac{16-8-2\times2\sqrt{3}}{16} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

De plus $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ donc $\sin\frac{\pi}{12} > 0$. On en déduit :

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

On peut également montrer que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ est une autre écriture du sinus, plus simple .

Exercices du livre :

n° 81 p 291

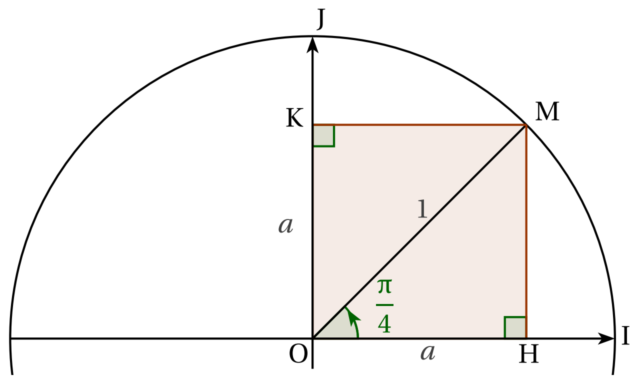
III.2. Valeurs remarquables et angles associés

Le tableau ci-dessous rappelle les valeurs remarquables du cosinus et du sinus pour des valeurs particulières d'un angle orienté θ (en radians). Il est connaître par coeur.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Preuve

Pour calculer les valeurs de $\sin\frac{\pi}{4}$ et de $\cos\frac{\pi}{4}$ on se place dans le quadrilatère OHMK ci-contre, de diagonale $\mathrm{OM} = 1$.



On sait que OHMK est un carré, car il possède 4 angles droits et que l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{OH}};\overrightarrow{\mathrm{OM}})$ mesure $\frac{\pi}{4}$.
On appelle a la mesure de son côté.

Par définition du cosinus et sinus d'un nombre réel, on a $a = \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$. Cherchons cette valeur.

Dans le triangle OHM rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\mathrm{OM}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{MH}^2 \iff 1^2 = 2a^2 + a^2 \iff a^2 = \frac{1}{2} \overset{a>0}{\iff} a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

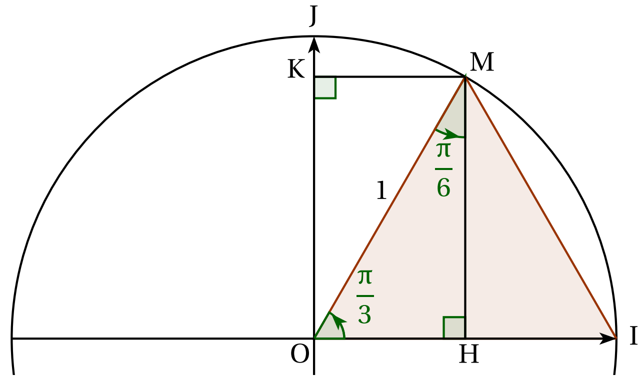
Donc $\boxed{\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Preuve (Suite)

Pour calculer les valeurs du cosinus et du sinus de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, on se place dans le triangle OIM ci-contre, de côté $OM = 1$.

On cherche $OH = \cos\frac{\pi}{3}$ et $OK = \sin\frac{\pi}{3}$.

On sait que le triangle OIM est équilatéral car $OM = OI$ et que $(\overrightarrow{OH};\overrightarrow{OM})$ mesure $\frac{\pi}{3}$.



Donc sa hauteur $[MH]$ est aussi sa médiane. D'où H est le milieu de $[OI]$ et $OH = \boxed{\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}}$.

De plus, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle OHM rectangle en H on a :

$$OM^2 = OH^2 + MH^2 \iff 1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + OK^2 \iff OK^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \overset{OK>0}{\iff} OK = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc $\boxed{\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

De plus la hauteur $[MH]$ du triangle OIM est aussi sa bissectrice donc $(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MI}) = \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$.

On en déduit dans le triangle OHM rectangle en H que $\boxed{\cos\frac{\pi}{6} = \frac{MH}{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ et $\boxed{\sin\frac{\pi}{6} = \frac{OH}{OM} = \frac{1}{2}}$

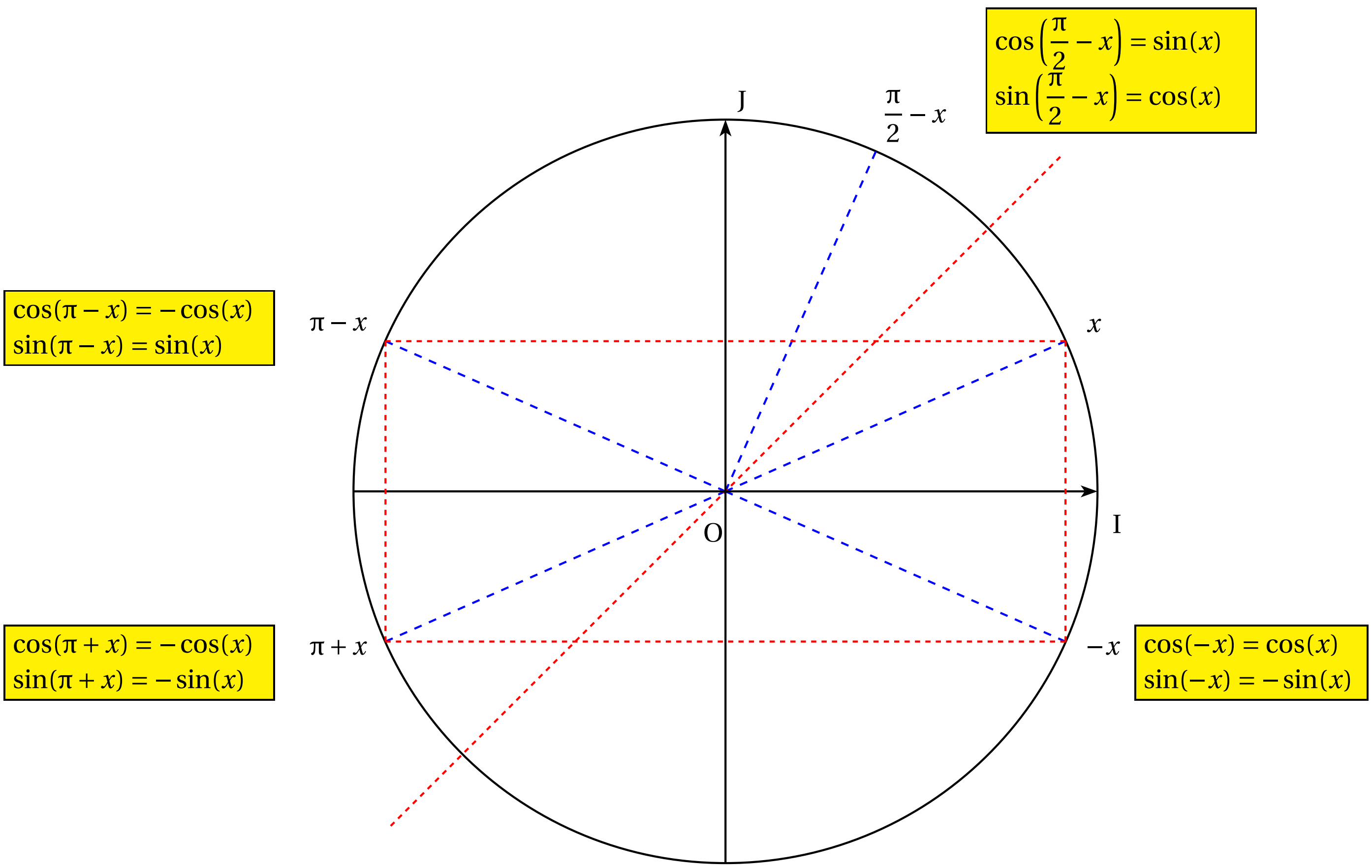
Propriété 6.

$\forall\theta \in \mathbb{R}$ on a :

1. $\cos\theta = \cos(-\theta)$
2. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
3. $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
4. $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
5. $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$
6. $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$
7. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$
8. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$
9. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$
10. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$

Preuve

On obtient cette propriété par une lecture astucieuse du cercle trigonométrique : Soit M le point associé à un réel x. Dans le repère $(\mathrm{O};\overrightarrow{\mathrm{OI}};\overrightarrow{\mathrm{OJ}})$ on a $\mathrm{M}(\cos(x);\sin(x))$.
Grâce à de nombreuses propriétés de symétrie sur le cercle $\mathscr{C}$, on peut déduire les coordonnées des points associés aux réels $-x$, $\pi-x$, $\pi+x$, $\dfrac{\pi}{2}-x$ et $\dfrac{\pi}{2}+x$ (donc la valeur de leur cosinus et sinus).
Sur le schéma ci-dessous, ces points permettent de définir ce que l'on appelle des angles associés.

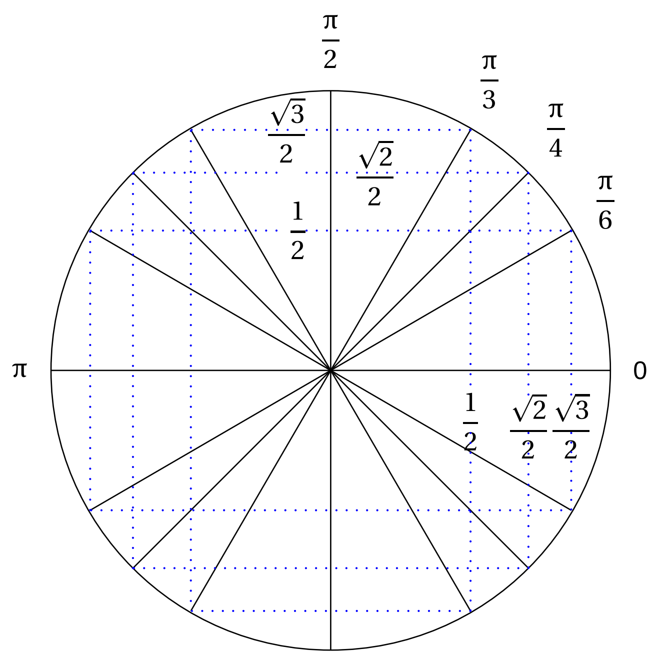


Exemple :

Simplifier les expressions suivantes : $\cos(-\pi-\theta)$, $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\cos^2(-x)+\sin^2(\pi-x)$

Exemple :
Grâce aux angles associés, trouver les valeurs des cosinus et sinus des angles suivants :

$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{7\pi}{4}$
$-\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$-\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{5\pi}{3}$
$\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{11\pi}{6}$	$-\dfrac{\pi}{6}$	$-\dfrac{5\pi}{6}$



Exercice 7 : Exprimer à l'aide de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ les expressions suivantes :
- $A = \cos(x+\pi) - \cos(-x) + 5\cos(x)$
- $B = \sin(\pi - x) + 2\sin(x+2\pi) + \sin(x+3\pi)$
- $C = \sin(\pi + x)\cos(\pi - x) - \sin(\pi - x)\cos(\pi + x)$
- $D = \sin(x+11\pi) + \sin(11\pi - x) - \cos(11\pi - x)$

Exercice 8 : Soit $a = \sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$. Exprimer en fonction de a :

$$\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) \qquad \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) \qquad \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) \qquad \cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)$$

Exercice(s) du livre : n° 75-82-83 p 291

III.3. Équations trigonométriques

Travail de l'élève **5.**

Partie A : Equation $\cos x = a$

1. Soit l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$ à résoudre dans $\mathbb{R}$.

a. Placer sur le cercle trigonométrique les points M et M′ d'abscisse $\dfrac{1}{2}$

b. Déterminer les mesures principales des angles $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'})$.
En déduire l'ensemble des solutions dans $]-\pi;\pi]$ de l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ cette équation.

2. **a.** Par une méthode analogue, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   b. En déduire les solutions dans $[0;2\pi[$ de cette équation.

3. **a.** Examiner le cas des équations $\cos x = 1.5$ et $\cos x = -3$.

   b. Donner une condition sur a pour que l'équation $\cos x = a$ puisse admettre des solutions.

4. Soit l'équation $\cos x = 0.25$.

   a. Sur le cercle trigonométrique, placer les images des solutions de l'équation.

   b. On note θ la solution de cette équation dans $[0;\pi[$.
   Exprimer en fonction de θ les solutions de l'équation $\cos x = 0.25$ sur $\mathbb{R}$.

   c. Résoudre cette équation dans $[0;2\pi[$.
   Donner, à l'aide de la calculatrice des valeurs approchées de ces solutions à 10^{-4} près.

Partie B : Equation $\sin x = a$

1. En suivant la même méthode que dans la partie A, résoudre l'équation $\sin x = \dfrac{1}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$ puis dans $\mathbb{R}$.

2. Même question pour $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donner ensuite les solutions de cette équation dans $[0;2\pi[$.

3. Soit l'équation $\sin x = 0.3$. On note α la solution de cette équation dans $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.
Exprimer en fonction de α les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = 0.3$.

Le cercle trigonométrique et la configuration des angles associés nous permettent de résoudre des équations du type $\cos x = \cos a$ et $\sin x = \sin a$ où a est un réel connu.

Propriété 7.

L'équation $\cos x = \cos a$ où $a \in \mathbb{R}$ admet pour solutions les nombres réels $x = a + 2k\pi$ et $x = -a + 2k'\pi$ où k et k' sont des entiers relatifs.
L'équation $\sin x = \sin a$ où $a \in \mathbb{R}$ admet pour solutions les nombres réels $x = a + 2k\pi$ et $x = \pi - a + 2k'\pi$ où k et k' sont des entiers relatifs.

Exemple :
Résoudre dans $]-\pi;\pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ et enfin dans $[0;2\pi[$ les équations suivantes :

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin x = -\frac{1}{2} \qquad \cos(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \qquad \cos(2x) = \frac{1}{2} \qquad \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 9 :

1. Par lecture sur le cercle trigonométrique, déterminer les réels t de $]-\pi;\pi]$ tels que $\cos(t) = -\dfrac{1}{2}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(t) = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\cos(x) = -1$
4. $\sin(x) = 0$

Dans chaque cas, donner les solutions de l'intervalle $[2\pi;5\pi[$

Exercice 11 : À l'aide d'une figure, résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x \in [0;2\pi[$
2. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x \in [-\pi;\pi[$
3. $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$ pour $x \in [-\pi;\pi[$
4. $\sin(x) < \frac{1}{2}$ pour $x \in [0;2\pi[$

Exercice 12 : Par lecture sur le cercle trigonométrique, déterminer les réels t de $]-\pi;\pi]$ puis ceux de $[0;2\pi[$ tels que

1. $-\frac{1}{2} \leq \sin(t) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\cos(t) \leq 0$
3. $1-2\sin(t) > 0$

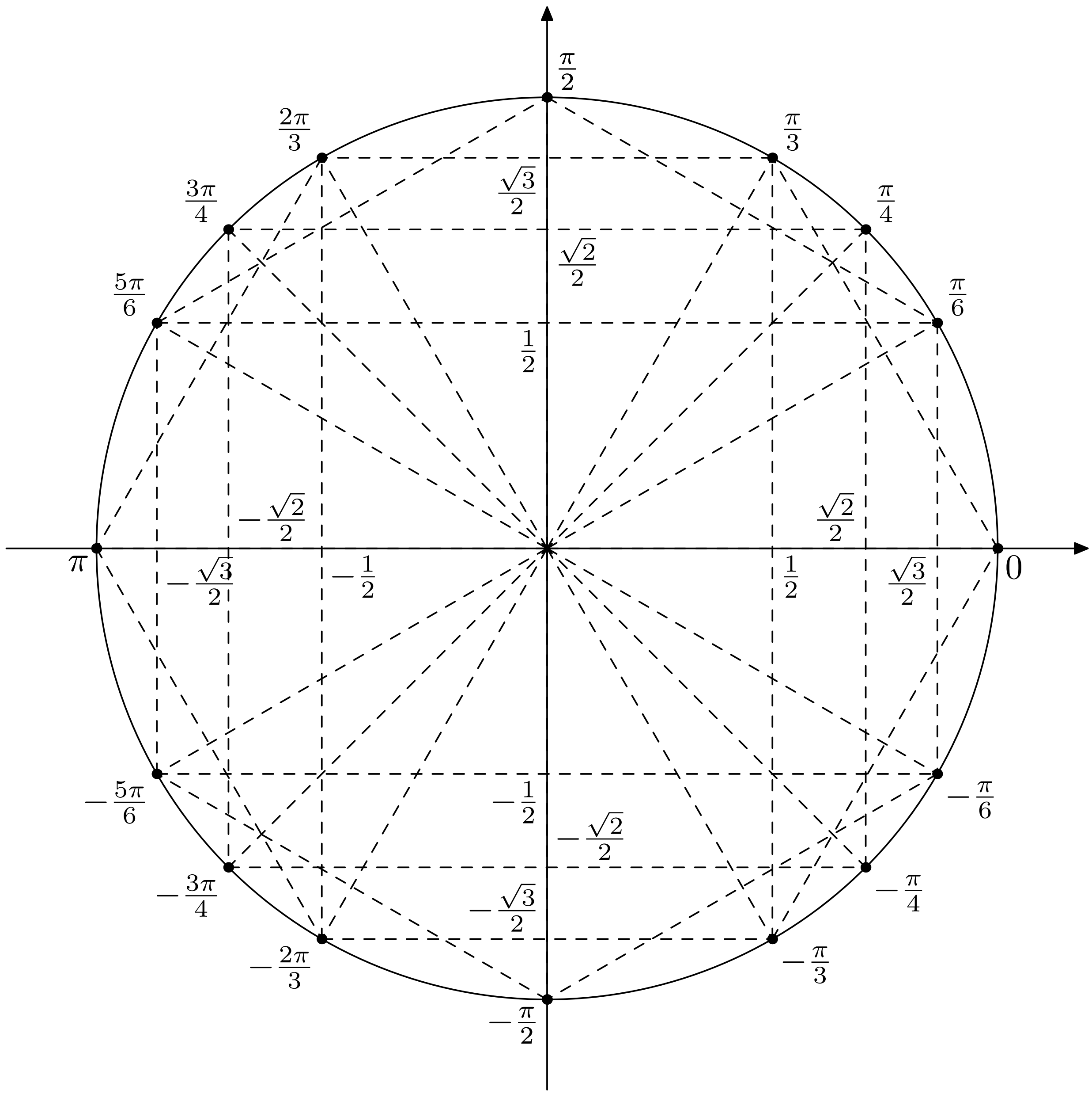
Exercice 13 : On considère l'équation (E) : $\sin x = \cos\frac{\pi}{3}$

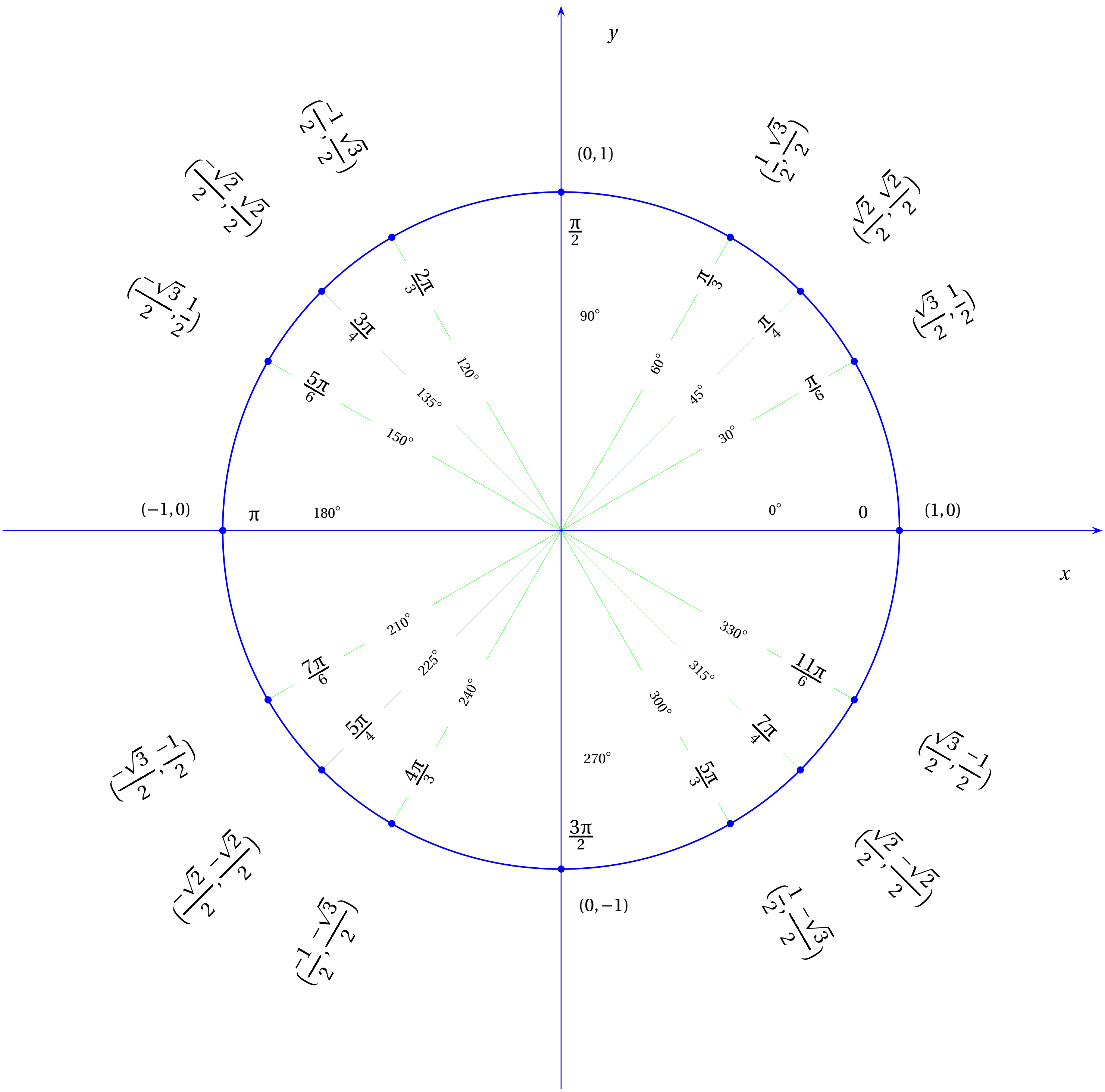
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E)
2. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation (E)

Exercice(s) du livre : n° 113-131-133-134-141 p 295

III.4. Cercles trigonométriques qui résume l'essentiel

Voici deux cercles trigonométriques qui résument l'essentiel :





« La physique est bien trop dure pour les phycisiens »

DAVID HILBERT, mathématicien