Chapitre 10

Une nouvelle opération sur les vecteurs

Hors Sujet

Titre : « Death Note »
Auteur : Oba et Obata
Présentation succinte : *Death Note* est un manga de type shônen, créé par le scénariste Tsugumi Oba et le dessinateur Takeshi Obata. Il a été prépublié dans un journal de 2003 à 2006, et par la suite publiée en douze tankôbon de 2004 à 2006.
L'histoire est centrée sur *Raito Yagami*, un lycéen surdoué qui juge le monde actuel criminel et corrompu. Sa vie change du tout au tout le jour où il ramasse par hasard un mystérieux cahier intitulé « Death Note ». Ancienne propriété d'un dieu de la mort, le Death Note permet à son utilisateur de tuer toute personne dont il connaît le nom et le visage. Raito décide d'utiliser le Death Note pour exterminer les criminels, dans le but d'éradiquer le Mal et de bâtir un monde parfait dont il sera le dieu.
Mais les nombreuses morts inexpliquées de criminels à travers le monde attirent l'attention d'Interpol et du mystérieux *L*, un détective capable de résoudre n'importe quelle énigme, mais dont personne ne connaît ni le visage ni le nom. L décide d'enquêter pour capturer le tueur en série, surnommé par le grand public « Kira ». Entre Raito et L, tous deux persuadés d'agir pour la justice, s'engage un combat acharné pour découvrir en premier l'identité de l'autre...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Découvrir les applications de la fonction dérivée
- ⇝ Connaître les formules pour trouver une fonction dérivée
- ⇝ Savoir étudier un sens de variation d'une fonction en utilisant sa dérivée.

« *Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée !* »

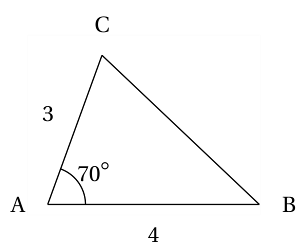
JOHN LOUIS VON NEUMANN

UNE NOUVELLE OPÉRATION SUR LES VECTEURS

Au fil du temps

Le produit scalaire est une nouvelle opération, qui a deux vecteurs associe un nombre réel. Etymologiquement, le mot « scalaire » provient du latin *scala* qui signifie échelle, historiquement le mot « scalaire » en mathématiques désigne un nombre réel. Si on veut comprendre le lien entre les deux, il faut remonter à l'empire romain. Dans les quartiers pauvres où s'élevaient de grands immeubles surpeuplés appelés *Insulae*, des échelles servaient parfois à passer d'un étage à l'autre. A l'époque, on désignait par « échelle 2 » ce qu'on appelerait aujourd'hui « étage 2 ». C'est ainsi que le mot échelle (scala) fut associé à l'idée de nombre.
Élément important de calcul en géométrie euclidienne, le produit scalaire apparaît cependant assez tard dans l'histoire des mathématiques. On en trouve trace chez Hamilton en 1843 lorsqu'il crée le corps des quaternions. Peano le définit ensuite associé à un calcul d'aire ou de déterminant. Roberto Marcolongo et Cesare Burali-Forti le définissent seulement à l'aide du cosinus d'un angle et lui donnent le nom de produit intérieur ou produit scalaire. C'est sous cette forme qu'il apparaît par la suite. Sa qualité de forme bilinéaire symétrique sera ensuite exploitée en algèbre linéaire et, de propriété, deviendra définition.
La notation du produit scalaire à l'aide d'un point ou d'une croix provient de Josiah Willard Gibbs, dans les années 1880.
Le produit scalaire possède de multiples applications. En physique, il est, par exemple, utilisé pour modéliser le travail d'une force. En géométrie analytique il permet de déterminer le caractère perpendiculaire de deux droites ou d'une droite et d'un plan.
En particulier il permet de répondre au problème suivant (un prolongement du théorème de Pythagore) :

Exemple :
ABC est un triangle tel que AB = 4 ; AC = 3 et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 70°$. Calculer BC.



I) Dans un repère orthonormal

Dans toute cette partie, on se place dans un repère **orthonormé** $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

On considère $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans ce repère.

I.1. Vecteurs orthogonaux

Définition 1.

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires. On note naturellement $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Théorème 1.

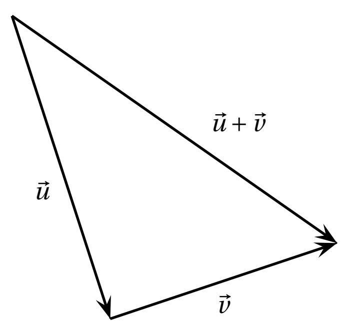
Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$

Attention !

A ne pas confondre avec le théorème :

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - xy' = 0$

Preuve



D'après le théorème de Pythagore on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \perp \vec{v} &\iff ||\,\vec{u}+\vec{v}\,||^2 = ||\,\vec{u}\,||^2 + ||\,\vec{v}\,||^2 \\
&\iff (x+x')^2 + (y+y')^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 \\
&\iff x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 \\
&\iff 2xx' + 2yy' = 0 \\
&\iff xx' + yy' = 0 \\
&\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0
\end{aligned}$$

Exemple :

Soient les points A$(1,-2)$, B$(2,3)$, C$(6,1)$ et D$(-4,3)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?

I.2. Définition analytique

Définition 2.

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre **réel** noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Exemple :

On donne $\vec{u}(2;3)$, $\vec{v}(6;-3)$ et $\vec{w}(6,-4)$

Alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times 6+3\times(-3) = 3$ et $\vec{u}\cdot\vec{w} = 2\times 6+3\times(-4) = 0$.

Donc on peut dire que $\vec{u}\perp\vec{w}$.

Remarques :

- Ainsi $\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
  Le produit scalaire trouve ainsi l'une de ses applications les plus courantes dans l'étude des vecteurs orthogonaux.
- $\vec{u}\cdot\vec{u} = x^2+y^2 = ||\,\vec{u}\,||^2$. On notera par convention : $\vec{u}^2 = ||\,\vec{u}\,||^2$
  De même si A et B désignent deux points, on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = ||\,\overrightarrow{AB}\,||^2$
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. La réciproque est fausse ! On l'a vu dans l'exemple... C'est encore le cas pour les vecteurs $\vec{u}(1;3)$ et $\vec{v}(-3;1)$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} = k\vec{v}$ et par conséquent :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xkx+yky = k(x^2+y^2) = k\,||\,\vec{u}\,||^2$$

Exercice 1 : Dans un repère orthonormal, les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(1;1)$, $(3;4)$ et $(3-k;-1)$ où k est un réel.

1. Déterminer le réel k afin que le triangle ABC soit rectangle en A.
2. Démontrer que le triangle ABC est alors isocèle en A.

Exercice(s) du livre : Repère : n° 85 p 377 (Algo) + 90 p 377 (vecteur orthogonal unitaire)

I.3. Propriétés immédiates

Propriété 1.

Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et un réel λ. Le produit scalaire est une forme

1. **Bilinéaire** (linéarité par rapport aux deux variables) :
   $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ (linéarité par rapport à la première variable)
   $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$ (linéarité par rapport à la seconde variable)
   $\vec{u}\cdot\lambda\vec{v} = \lambda\vec{u}\cdot\vec{v} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$
2. **Symétrique** : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
3. **Définie positive** : $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

Preuve

Dans un repère orthonormal, notons $\vec{u}(x;y)$, $\vec{v}(x';y')$ et $\vec{w}(x'';y'')$

1. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = x(x'+x'')+y(y'+y'') = xx'+xx''+yy'+yy'' = xx'+yy'+xx''+yy'' = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
   $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = (x+x')x''+(y+y')y'' = xx''+x'x''+yy''+y'y'' = xx''+yy''+x'x''+y'y'' = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
   $\vec{u}\cdot\lambda\vec{v} = x\lambda x'+y\lambda y' = \lambda xx'+\lambda yy' = \lambda\vec{u}\cdot\vec{v} = \lambda(xx'+yy') = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy' = x'x+y'y = \vec{v}\cdot\vec{u}$
3. $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \iff x^2+y^2 = 0 \iff x = 0$ et $y = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

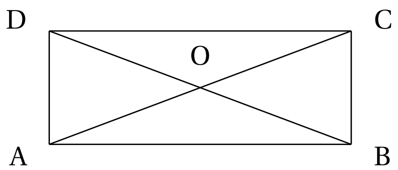
Exemple :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$$

Exemple :

ABCD est un rectangle de centre O tel que AB = 4 et BC = 3. Calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$

<u>**Solution :**</u>



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} &= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{DB}\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DB}\\ &= AB^2-BC^2\\ &= 16-9=7\end{aligned}$$

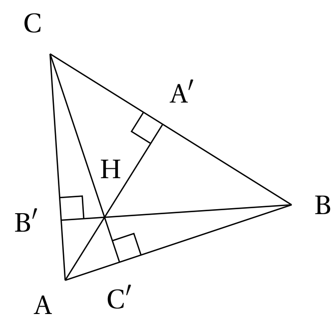
Remarque : Pour calculer un produit scalaire, on peut décomposer un vecteur suivant des directions orthogonales.

Application :

Retrouver, à l'aide du produit scalaire, le fait que les hauteurs d'un triangle sont concourantes. (n° 92 p 377)

<u>**Solution :**</u>

Notons A', B' et C' les projetés orthogonaux de A, B et C respectivement sur (BC), (AC) et (AB) et $H=(BB')\cap(CC')$ (intersection de deux des hauteurs). On veut montrer que H appartient à la troisième hauteur (AA'), ie que (AH) et (BC) sont perpendiculaires, ou encore que $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.



Remarquons déjà que $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AH}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH}\right)\cdot\overrightarrow{BA}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}\right)+\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BH}+\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\vec{0}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\vec{0}\\ &= -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{aligned}$$

Les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires, donc la droite (AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC.

II) Indépendance du repère : Autres caractérisations du produit scalaire

Dans cette partie, on se place dans un repère **quelconque** $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$du plan.
On désigne par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

Théorème 2. (Formules avec les normes)

On a
$$\begin{array}{rcl} (\vec{u}+\vec{v})^2 & = & \vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v} \\ \iff \quad ||\vec{u}+\vec{v}||^2 & = & ||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2+2\vec{u}\cdot\vec{v} \end{array}$$

On retiendra

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(||\,\vec{u}+\vec{v}\,||^2-||\,\vec{u}\,||^2-||\,\vec{v}\,||^2\right)}$$

Et
$$\begin{array}{rcl} (\vec{u}-\vec{v})^2 & = & \vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v} \\ \iff \quad ||\vec{u}-\vec{v}||^2 & = & ||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2-2\vec{u}\cdot\vec{v} \end{array}$$

On retiendra

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(||\,\vec{u}\,||^2+||\,\vec{v}\,||^2-||\,\vec{u}-\vec{v}\,||^2\right)}$$

Preuve

Grâce aux propriétés du produit scalaire, on a

1. $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$
2. $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$

Les équivalentes dans chaque cas sont évidentes.
On peut constater que l'on a aussi :

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2 \iff (\vec{u}+\vec{v})\,(\vec{u}-\vec{v})=||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2$$

car

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}^2=\vec{u}^2-\vec{v}^2-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}^2-\vec{v}^2$$

Remarque : Le produit scalaire de deux vecteurs est donc indépendant du repère choisi. La formule avec les coordonnées n'est valable que pour un repère orthonormé cependant.

Exemples :

Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on donne $A(1,1)$, $B(4,1)$ et $C(3,3)$.
Calculer de trois manières différentes $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Théorème 3. (Deux autres caractérisations du produit scalaire)

- $\leadsto$ Lorsque $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$, on a $\vec{u}\cdot\vec{v}=||\,\vec{u}\,||\times||\,\vec{v}\,||\times\cos(\vec{u};\vec{v})$
- $\leadsto$ Lorsque $\vec{u}\neq\vec{0}$, on a $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}'$ où $\vec{v}'$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ suivant la direction de $\vec{u}$

Preuve

Supposons que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$. Commençons par construire un repère orthonormal :

Posons $\vec{i} = \dfrac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$, et $\vec{j}$ le vecteur tel que : $(\vec{i};\vec{j}) = \dfrac{\pi}{2}$ et $||\vec{j}|| = 1$

Ainsi la base $(\vec{i};\vec{j})$ est orthonormée directe. Dans cette base, en notant $\theta = (\vec{u};\vec{v})$ on a :

$$\vec{u}\,(||\vec{u}||, 0) \qquad , \qquad \vec{v}\,(||\vec{v}||\cos\theta; ||\vec{v}||\sin\theta) \qquad , \qquad \vec{v}'\,(||\vec{v}||\cos\theta; 0)$$

D'où :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos(\vec{u};\vec{v}) \text{ et } \vec{u}\cdot\vec{v}' = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos(\vec{u};\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v}$$

Exemple :

ABC est un triangle tel que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 18$, $AB = 6$ et $AC = 2\sqrt{3}$.
Calculer la mesure exacte en radians de l'angle $\widehat{BAC}$

Corollaire 1.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires

⇝ de même sens alors : $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$

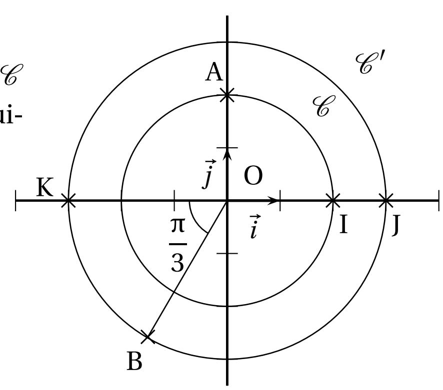
⇝ de sens contraire alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\,||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$

Application :

1. **Inégalité triangulaire** : n° 57 p 373
   Remarquons déjà que pour tout $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$ Or $\forall\theta$ on a $\cos(\theta) \leq 1$.
   Donc $\vec{u}\cdot\vec{v} \leq ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$ Ainsi :
   $$\begin{aligned} ||\vec{u}+\vec{v}||^2 &= ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} \\ &\leq ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\,||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| = (||\vec{u}|| + ||\vec{v}||)^2 \end{aligned}$$
   Comme les normes sont des nombres positifs, on en déduit que $\forall\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a $||\vec{u}+\vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$
2. **Identité du parallélogramme** : n° 83 p 373
   Avec les identités précédentes, on a $(\vec{u}+\vec{v})^2 + (\vec{u}-\vec{v})^2 = 2(\vec{u}^2+\vec{v}^2)$
   Si ABCD est un parallélogramme, en notant $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ on obtient une relation entre les diagonales et les côtés du parallélogramme : $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$

Exercice 2 : Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, on a tracé deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centre O et de rayons respectifs 2 et 3. Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OJ}$
2. $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OK}$
3. $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OB}$
4. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$
5. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AI}$
6. $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IJ}$



Exercice 3 : Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$:

1. $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(-1;5)$
2. $\|\vec{u}\| = 1$; $\|\vec{v}\| = 2$; $(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{2\pi}{3}$ rad
3. $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 3$
4. $\|\vec{u}\| = 1$; $\|\vec{v}\| = 3$; $(\vec{u},\vec{v}) = 0$ rad
5. $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = 3$; $(\vec{u},\vec{v}) = \pi$ rad
6. Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormal : $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

Exercice 4 : On prend le centimètre comme unité. Construire un triangle ABC tel que :

1. $AB = 3$, $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$
2. $AB = 3$, $AC = 6$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -9$

Exercice 5 : ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de [BC]. Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$
2. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CI}$
3. $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AI}$

Exercice 6 : Soit ABC un triangle et K le projeté orthogonal de A sur (BC). On donne $AB = 6$, $BK = 4$ et $KC = 7$

1. Calculer les produits scalaires suivants $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$.
2. Déterminer et représenter en rouge l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC} = 44$

Exercice 7 : On considère un segment [AB] et O son milieu. Soit Δ la médiatrice du segment [AB] et $M \in \Delta$.
Montrer de deux manières différentes que :

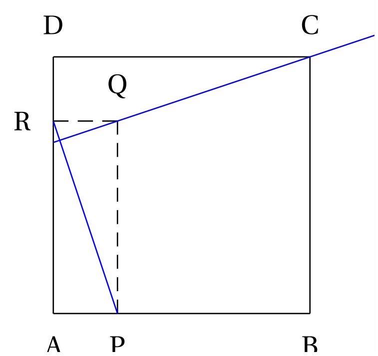
$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}AB^2$$

Exercice 8 : ABC est un triangle dans lequel $AB = 2$ et $AC = 3$. De plus $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4$
ABC est-il rectangle ? Si oui, préciser le sommet.

Exercice 9 : ABCD est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$.
Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$. En déduire BD.

Exercice 10 : Soit ABCD un carré, on construit un rectangle APQR tel que :

- P et R sont sur les côtés [AB] et [AD] du carré
- $AP = DR$



But : On souhaite montrer que les droites (PR) et (CQ) sont perpendiculaires

1. Montrer que : $\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{CQ}\cdot\left(\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}\right)$
2. En déduire que les droites (PR) et (CQ) sont perpendiculaires.

Exercice 11 : $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon r et M un point non situé sur $\mathscr{C}$. Deux droites issues de M coupent $\mathscr{C}$ respectivement en A et B et en C et D
But : Montrer que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$
On note A′ le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$

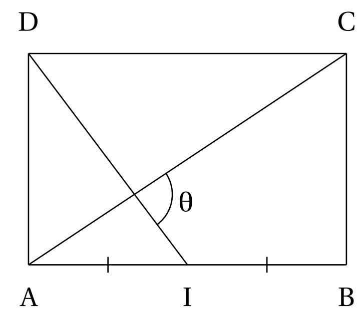
1. Faire deux figures suivant que M est à l'intérieur ou à l'extérieur de $\mathscr{C}$
2. Démontrer que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}$

3. a. En utilisant la relation de Chasles, démontrer que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'} = MO^2 - r^2$
   b. En déduire que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$

Note

On montre ainsi que le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ est indépendant de la sécante issue de M, il ne dépend que de la distance de M à O. Le réel $MO^2 - r^2$ (qui est nul lorsque M est un point de $\mathscr{C}$) est appelé **puissance de** M **par rapport à** $\mathscr{C}$. Il est positif lorsque M est à l'extérieur de $\mathscr{C}$ et négatif si M est à l'intérieur de $\mathscr{C}$

Exercice 12 : ABCD est un rectangle tel que AD = 3 et AB = 5. I est le milieu de [AB].



1. Calculer AC et DI.
2. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DI}$.
4. En déduire la valeur de l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{DI};\overrightarrow{AC}\right)$ à 0,001 près en degrés.

Exercices du livre : Repère

n° 52 (projetés) + 53 (repère à introduire) + **64 (divers calculs) p 372** + 121 p 281 (tr. constructible)

Exercice(s) du livre : Repère : n° 73-74 p 375

III) Applications

III.1. Aux Droites

Dans toute cette partie, on se place dans un repère orthonormal.

Rappel

Toute droite admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont trois nombres réels, dans ce cas $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur.
Réciproquement, l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax + by + c = 0$, avec $(a;b) \neq (0,0)$ est une droite dirigée par $\vec{u}(-b;a)$.

Définition 3.

Un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ est **normal** à une droite d si et seulement si sa direction est orthogonale à celle de d

Théorème 4.

Soit d une droite passant par un point A et $\vec{n}$ un vecteur normal à d.
Alors d est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$.
Autrement dit, $M(x;y) \in d \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$.

Preuve

Remarquons déjà qu'il n'existe qu'une droite passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.
Notons $A(x_A, y_A)$ et $\vec{n}(a; b)$.
L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est l'ensemble des points tels que :

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \iff a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \iff ax + by - ax_A - by_A = 0$$

ce qui est l'équation cartésienne d'une droite D de vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$.
Or $\vec{u} \cdot \vec{n} = -ba + ab = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, ou encore $\vec{n}$ est normal à D.
De plus $ax_A + by_A - ax_A - by_A = 0$ donc A vérifie l'équation cartésienne de D, ie $A \in D$.
Comme il n'existe qu'une droite de vecteur normal $\vec{n}$ passant par A, on a $D = d$.

Remarque : Si d est une droite d'équation $ax+by+c = 0$, alors $\vec{n}(a; b)$ est un vecteur normal de d, et réciproquement.

Théorème 5.

Soient les droites d et d' d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.
d et d' sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$

Preuve

Considérons les deux vecteurs $\vec{n}(a; b)$ et $\vec{n}'(a'; b')$ normaux à d et d'
$d \perp d' \iff \vec{n} \cdot \vec{n}' \iff aa' + bb' = 0$

Exemples :

1. Dans un repère orthonormal, la droite d a pour équation $x - y + 2 = 0$. Trouver une équation de la droite Δ perpendiculaire à d passant par le point $B(2; 1)$.
2. Dans un repère orthonormal, on donne les points $A(0; 3)$ et $B(4; -1)$. Trouver une équation de la médiatrice de [AB].

Exercice 13 : On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère un triangle ABC avec$A(-1; 2)$, $B(3; 1)$ et $C(2; 4)$.

1. Déterminer une équation de la médiatrice du segment [AB].
2. Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Exercice 14 : Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points suivants :

$$A(2; 1) \qquad B(7; 2) \qquad C(3; 4)$$

Les questions suivantes sont indépendantes et sans rapport :

1. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de [BC].
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. L'angle $\widehat{A}$ est-il droit ?

Exercice 15 : Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $A(3; 5)$.
Chercher une équation de la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon OA.

III.2. Aux triangles

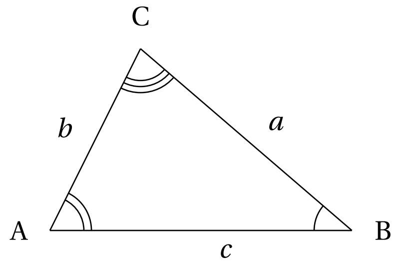
Dans cette partie, on utilise les notations suivantes.

Soit ABC un triangle quelconque dans le plan. On note

$$\mathrm{AB} = c \quad \mathrm{BC} = a \quad \mathrm{CA} = b$$

,

$$\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{BAC}} \quad \widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{CBA}} \quad \widehat{\mathrm{C}} = \widehat{\mathrm{ACB}}$$



Travail de l'élève 1 :

1. En remarquant que $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, montrer que $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{\mathrm{A}}}$ **(Formule d'Al-Kashi)**.
2. **Application 1** : ABC est un triangle tel que $\mathrm{AB} = 4$; $\mathrm{AC} = 3$ et $(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = 70°$.
   Calculer BC.
3. **Application 2** : ABC est un triangle tel que $\mathrm{BC} = 4$, $\widehat{\mathrm{B}} = 75°$ et $\widehat{\mathrm{C}} = 45°$
   Calculer AB et AC.

Théorème 6 : *d'Al Kashi, dit « Pythagore généralisé »*

Avec les notations précédentes : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{\mathrm{A}}$

Preuve

Comme $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, il vient $\mathrm{BC}^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
d'où $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{\mathrm{A}}$

Exemple :

ABC est un triangle tel que AB = 4 ; AC = 3 et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 70°$. Calculer BC.

Propriété 2 :

Avec les notations précédentes, $S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$

Preuve

Soit H le pied de la hauteur issue de C. On sait que :

$$S = \frac{1}{2}AB \times CH$$

Lorsque $\widehat{A}$ est aigu, $CH = CA\sin\widehat{A}$ et sinon $CH = \sin\left(\pi - \widehat{A}\right) = CA\sin\widehat{A}$. Par conséquent, dans tous les cas : $S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$

Corollaire 2 :

Avec les notations précédentes, $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}$

Preuve

D'après le théorème précédent, $2S = bc\sin\widehat{A} = ca\sin\widehat{B} = ab\sin\widehat{C}$

En multipliant 2S par $\dfrac{1}{abc}$, on obtient

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$$

Comme les sinus des angles d'un triangle sont différents de zéro, on obtient : $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}$

Exemple :

ABC est un triangle tel que BC = 4, $\widehat{B} = 75°$ et $\widehat{C} = 45°$
Calculer AB et AC

Exercices du livre : Repère

n° 131-132-135-137-139-140-144 p 382

III.3. A la trigonométrie

Travail de l'élève 2 : *Dans cette activité, nous allons démontrer les célèbres formules de trigonométrie suivantes.*

Propriété 3.

Pour tous réels a et b on a : $\boxed{\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b}$ $(\star)$

On en déduit :

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b\\ \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b\\ \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b\end{array}}$$

Ainsi que les formules de duplication :

$$\boxed{\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}}$$

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j})$, on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires, tels que : $(\vec{i};\vec{u})=a$ et $(\vec{i};\vec{v})=b$

1. Démontrons tout d'abord $(\star)$.
   a. Faire le schéma d'un cercle trigonométrique, muni d'un repère $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j})$, et dessiner deux représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant pour origine O.
   b. Déterminer $(\vec{u};\vec{v})$ en fonction de a et b.
   c. En déduire que $\vec{u}.\vec{v}=\cos(a-b)$.
   d. Préciser les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de a et b.
   e. En déduire que $\vec{u}.\vec{v}=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.
   f. En déduire que pour tous réels a et b on a $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.
   g. **Application** : En remarquant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, calculer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.
2. Quelle relation connue obtient-on en prenant $b=a$ dans $(\star)$?
3. Grâce à la configuration du rectangle dans le cercle trigonométrique, retrouver les trois formules suivantes de la propriété ci-dessus.
4. Utiliser désormais $(\star)$ pour retrouver les formules de duplication.
5. **Application** : A l'aide des formules de duplications, calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Propriété 4 :
Quels que soient les réels a et b :

1. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
2. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
3. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
4. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Preuve

1. Choisissons un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O, muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j})$. A et B sont les points de $\mathscr{C}$ tels que, en radians, $(\vec{i},\overrightarrow{OA}) = a$ et $(\vec{i},\overrightarrow{OB}) = b$. Dans ce cas $A(\cos a;\sin a)$ et $B(\cos b;\sin b)$
   De plus
   $$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) = \left(\overrightarrow{OA},\vec{i}\right) + \left(\vec{i};\overrightarrow{OB}\right) = b-a$$
   Exprimons le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ de deux manières différentes :
   $$\begin{array}{rrcl} \text{Avec les coordonnées :} & \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} & = & \cos a\cos b + \sin a \sin b \\ \text{D'autre part :} & \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} & = & OA\times OB\times\cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \cos(b-a)\end{array}$$
2. On sait que $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$
   En écrivant $a+b = a-(-b)$, on obtient :
   $$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos a\cos(-b) + \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
3. $\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+b\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b = \sin a\cos b - \cos a \sin b$
4. $\sin(a+b) = \sin(a-(-b)) = \sin a\cos(-b) - \cos a \sin(-b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

Corollaire 3 : Formules de duplication
Quel que soit le réel a on a :

1. $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$
2. $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$

Preuve
En utilisant le théorème précédent, il vient :
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \qquad \text{et} \qquad \sin 2a = 2\sin a \cos a$$
Comme $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on obtient aussi :
$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \qquad \text{et} \qquad \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$
D'où
$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

Exemple :

1. En remarquant que $\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$, calculer $\sin\dfrac{11\pi}{12}$
2. En remarquant que $2\times\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$. Calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$

Exemple :

1. Simplifier l'écriture de $F(x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$
2. Démontrer que :
   a. $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x - \cos x$
   b. Pour tout réel a, $1 + \cos a + \sin a = 2\cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}\right)$

Exercices du livre : Repère

n° 90-91-95-98-103-105-107-109-123-127-138 ? p 292

III.4. Aux Cercles

Dans toute cette partie, on se place dans un repère orthonormal.

Théorème 7 :

Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Preuve

Notons $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB]. Si M = A ou M = B c'est évident.
Sinon, $\mathscr{C}$ privé des points A et B est l'ensemble des points M du plan tels que AMB soit un triangle rectangle en M, donc l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux i.e $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Théorème 8 :

On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.
Le cercle $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

où $(x_0; y_0)$ sont les coordonnées du centre du cercle $\mathscr{C}$ et r son rayon.

Preuve

$M(x; y) \in \mathscr{C} \iff OM = r \iff OM^2 = r^2 \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Exemples :

- $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$ est une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $O(-3; 1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.
- On donne les équations suivantes :

  1. $x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0$ 2. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$ 3. $2x^2 + 2y^2 - 4x - 6y + 7 = 0$

  Pour chacune des équations précédentes, dites si c'est l'équation d'un cercle. Si oui, préciser son centre et son rayon.

Exemple :

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ trouver une équation :

1. du cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(1; 2)$ passant par $J(3; -2)$
2. du cercle $\mathscr{C}'$ passant par les points O, $A(4; 0)$ et $B(0; 2)$.

Exercices du livre : Repère

n° 110 (cercle circonscrit) + 112 (cercle + tangente) + 114 (équations) + 115-116 (algo et condition) + 118-119 (intersections) p 381

« C'est marrant, suffit de s'arranger pour que quelqu'un pige rien à ce qu'on lui dit et on obtient pratiquement tout ce qu'on veut. »

J.D SALINGER, écrivain, extrait de l'attrape-coeurs