I) Dans un repère orthonormal

Dans toute cette partie, on se place dans un repère **orthonormé** $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On considère $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans ce repère.

I.1. Vecteurs orthogonaux

Définition 1.

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ……………….. On note naturellement $\vec{u}$…… $\vec{v}$.

Rappels

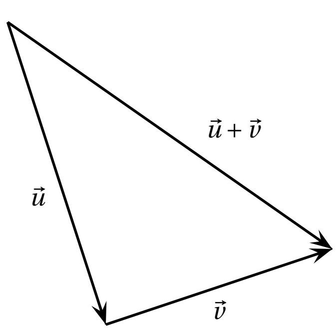
$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont **colinéaires** si et seulement si ……………………

La norme du vecteur $\vec{u}$ est $||u|| =$ …………………… $\iff ||\vec{u}||^2 =$ ……………………

Théorème 1.

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont **orthogonaux** si et seulement si ………………………

Preuve



D'après le théorème de Pythagore on a les équivalences suivantes :

$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \iff$

$\iff$

$\iff$

$\iff$

$\iff$

Exemple :

Soient les points A(1, −2), B(2, 3), C(6, 1) et D(−4, 3). Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?

I.2. Définition analytique

Définition 2.

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre **réel** noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple :

On donne $\vec{u}(2;3)$, $\vec{v}(6;-3)$ et $\vec{w}(6,-4)$

Calculer les produits scalaires des vecteurs deux à deux. Que peut-on en conclure ?

Remarques :

- Ainsi $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
  Le produit scalaire nous servira essentiellement à montrer que des vecteurs sont orthogonaux.

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$ On notera par convention : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

  De même, si A et B désignent deux points, on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots\ldots.$ La réciproque est ………………!
  On l'a vu dans l'exemple. Trouver autres vecteurs pour lesquels c'est le cas.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{v} = k\vec{u}$ et par conséquent :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

  En particulier, si $\vec{v} = \vec{u}$ on a déjà vu que …………

  Si $\vec{v} = -\vec{u}$ on a …………

I.3. Propriétés immédiates

Propriété 1.

Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et un réel λ. Le produit scalaire est une forme

- **Bilinéaire** (linéarité par rapport aux deux variables) :

  $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (linéarité par rapport à la première variable)

  $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (linéarité par rapport à la seconde variable)

  $\vec{u}\cdot\lambda\vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- **Symétrique** : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- **Définie positive** : $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \Longleftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Preuve

Dans un repère orthonormal, notons $\vec{u}(x;y)$, $\vec{v}(x';y')$ et $\vec{w}(x'';y'')$. On applique simplement la formule.

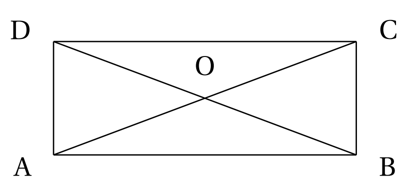
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = x(x'+x'')+y(y'+y'') = xx'+xx''+yy'+yy'' = xx'+yy'+xx''+yy'' = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
  $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = (x+x')x''+(y+y')y'' = xx''+x'x''+yy''+y'y'' = xx''+yy''+x'x''+y'y'' = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
  $\vec{u}\cdot\lambda\vec{v} = x\lambda x'+y\lambda y' = \lambda xx'+\lambda yy' = \lambda\vec{u}\cdot\vec{v} = \lambda(xx'+yy') = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy' = x'x+y'y = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \Longleftrightarrow x^2+y^2 = 0 \Longleftrightarrow x=0$ et $y=0 \Longleftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$

Exemples :

1. Montrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$

2. ABCD est un rectangle de centre O tel que AB = 4 et BC = 3. Calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$

<u>**Solution :**</u>

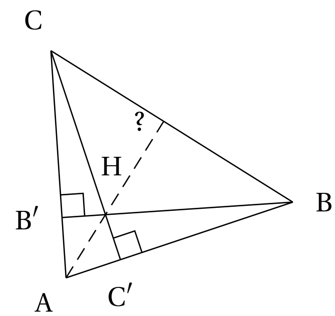


$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} &= \\ &= \\ &= AB^2-BC^2 \\ &= \end{aligned}$$

Remarque : Pour calculer un produit scalaire, on peut décomposer un vecteur suivant des directions orthogonales.

Application :
Retrouver, à l'aide du produit scalaire, le fait que les hauteurs d'un triangle sont concourantes. (n° 92 p 377)

<u>**Solution :**</u>
Notons B' et C' les projetés orthogonaux de B et C respectivement sur (AC) et (AB) et $H = (BB') \cap (CC')$ (intersection de deux des hauteurs).
On veut montrer que H appartient à la troisième hauteur, ie que (AH) et (BC) sont perpendiculaires, ou encore que $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.



Remarquons déjà que $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ et $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$$\begin{aligned}
\text{Par conséquent :} \quad \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AH} \cdot \left(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right) \\
&= \\
&= \left(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right) \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}$$

Les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires, donc la droite (AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC.

II) Indépendance du repère : Autres caractérisations du produit scalaire

Dans cette partie, on se place dans un repère **quelconque** $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.
On désigne par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

Théorème 2. (Formules avec les normes)

On a $(\vec{u} + \vec{v})^2 =$

$\iff ||\vec{u} + \vec{v}||^2 =$

On retiendra

$\vec{u} \cdot \vec{v} =$

Et $(\vec{u} - \vec{v})^2 =$

$\iff ||\vec{u} - \vec{v}||^2 =$

On retiendra

$\vec{u} \cdot \vec{v} =$

Preuve

Grâce aux propriétés du produit scalaire, on a

1. $(\vec{u}+\vec{v})^2 =$

2. $(\vec{u}-\vec{v})^2 =$

Les équivalentes dans chaque cas sont évidentes.

Remarque : Le produit scalaire de deux vecteurs est donc indépendant du repère choisi. La formule avec les coordonnées n'est valable que pour un repère orthonormé cependant.

Exemples :

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ on donne $A(1,1)$, $B(4,1)$ et $C(3,3)$.
Calculer de trois manières différentes $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Théorème 3. (Deux autres caractérisations du produit scalaire)

- Lorsque $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$, on a $\vec{u}\cdot\vec{v}=$
- Lorsque $\vec{u}\neq\vec{0}$, on a $\vec{u}\cdot\vec{v}=$
  où $\vec{v}'$ est le **projeté orthogonal** de $\vec{v}$ suivant la direction de $\vec{u}$

Preuve

Supposons que $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$. Commençons par construire un repère orthonormal :
Posons $\vec{i}=\dfrac{\vec{u}}{||\,\vec{u}\,||}$, et $\vec{j}$ le vecteur tel que : $(\vec{i};\vec{j})=\dfrac{\pi}{2}$ et $||\,\vec{j}\,||=1$
Ainsi la base $(\vec{i};\vec{j})$ est orthonormée directe. Dans cette base, en notant $\theta=(\vec{u};\vec{v})$ on a :

$$\vec{u}\,(||\,\vec{u}\,||,0) \qquad , \qquad \vec{v}\,(||\,\vec{v}\,||\cos\theta;||\,\vec{v}\,||\sin\theta) \qquad , \qquad \vec{v}'\,(||\,\vec{v}\,||\cos\theta;0)$$

D'où :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=||\,\vec{u}\,||||\,\vec{v}\,||\cos(\vec{u};\vec{v}) \text{ et } \vec{u}\cdot\vec{v}'=||\,\vec{u}\,||||\,\vec{v}\,||\cos(\vec{u};\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{v}$$

Exemple :

ABC est un triangle tel que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 18$, $AB = 6$ et $AC = 2\sqrt{3}$.
Calculer la mesure exacte en radians de l'angle $\widehat{BAC}$

Application :

1. **Inégalité triangulaire** : n° 57 p 373
   Remarquons déjà que pour tout $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ Or $\forall\theta$ on a $\cos(\theta) \leq 1$.
   Donc $\vec{u}\cdot\vec{v} \leq || \vec{u} || \times || \vec{v} ||$ Ainsi :

$$\begin{aligned} ||\vec{u}+\vec{v}||^2 &= ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} \\ &\leq || \vec{u} ||^2 + || \vec{v} ||^2 + 2 || \vec{u} || \times || \vec{v} || = (|| \vec{u} || + || \vec{v} ||)^2 \end{aligned}$$

   Comme les normes sont des nombres positifs, on en déduit que $\forall \vec{u}$ et $\vec{v}$ on a $||\vec{u}+\vec{v}|| \leq || \vec{u} || + || \vec{v} ||$
2. **Identité du parallélogramme** : n° 83 p 373
   Avec les identités précédentes, on a $(\vec{u}+\vec{v})^2 + (\vec{u}-\vec{v})^2 = 2(\vec{u}^2 + \vec{v}^2)$
   Si ABCD est un parallélogramme, en notant $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ on obtient une relation entre les diagonales et les côtés du parallélogramme : $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$