AP : Dénombrement et yams

Avec mes amis, nous jouons souvent au yam's menteur (5 dés). Il est établi entre nous que l'ordre décroissant de ce que l'on obtient avec les dés est :

- Yams : 5 dés identiques
- Carrés : 4 dés identiques
- Full : 3 dés identiques + 2 autres identiques
- Suite : 5 numéros qui se suivent
- Brelan : 3 dés identiques
- Double-paire : 2 fois 2 dés identiques
- Paire : 2 dés identiques
- Rien : Aucune des figures précédentes.

La puissance d'une figure devrait évidemment dépendre de sa probabilité d'apparition. On cherche à savoir si notre choix est cohérent avec cette règle.

Partie A : L'univers

Il est évident que l'ordre des dés ne compte pas. Cependant, lorsqu'on en tient compte dans notre modélisation, les issues sont équiprobables, ce qui rend les calculs simples, de plus on peut alors utiliser les arbres, très pratiques d'utilisation.
Nous allons donc commencer par tenir compte de l'ordre, puis « l'enlever » (comme souvent en probabilité).

Imaginer alors un arbre représentant la situation du jeu, afin de déterminer le nombre d'issues total.

Partie B : Dénombrement des issues

Comme nous sommes dans un cas d'équiprobabilité, plutôt que d'étudier les probabilités de chacune des figures, nous allons ***dénombrer*** le nombre de cas favorables de chacune, cela évitera les fractions.

1. **Le Yams : 5 dés identiques**
   Donner le nombre de yams possibles (ie le nombre de chemins dans l'arbre réalisant le yams).
2. **Le carré : 4 dés identiques**
   a. Lister les branches de l'arbre imaginaire contenant un carré de 1 et un 3, afin d'en déterminer le nombre (on écrira les quadruplets correspondants).
   *On cherche en fait le nombre de chemins de l'arbre imaginaire contenant quatre 1 et un 3, ie le nombre de manières d'**ordonner** (de positionner) **quatre dés identiques parmi 5**.*
   Ce nombre est noté $\binom{5}{4}$. On trouve $\binom{5}{4} = \dots$
   Il est évident que cela revient à ordonner un dé parmi 5 (on positionne le 3 au lieu des 1).
   On a donc $\binom{5}{4} = \binom{5}{1}$
   b. En déduire le nombre de carrés de 1 possibles.
   c. En déduire le nombre de carrés possibles.
3. **Le full : 3 dés identiques + 2 identiques**
   a. A l'aide d'un arbre, donner le nombre de full contenant un brelan de 6, et une paire de 4.
   On cherche en fait le nombre de chemins de l'arbre imaginaire contenant trois 6 et deux 4, ie le nombre de façons d'ordonner trois dés identiques parmi 5 (les deux restants jouant le même rôle).
   On trouve $\binom{\dots}{\dots} = \binom{\dots}{\dots} = \dots$
   b. En déduire le nombre de full avec un brelan de 6 possibles.

   c. En déduire le nombre de full possibles.

4. **La suite : 5 dés qui se suivent**

   a. A l'aide d'un nouvel arbre imaginaire, donner le nombre de petites suites possibles (celles commençant au 1).
   On cherche en fait le nombre de chemins du premier arbre imaginaire contenant 1, 2, 3, 4, 5, ie le nombre de manières de ***permuter*** *(de positionner)* ***5 dés différents****.*
   Ce nombre est noté 5! On a 5! = ...

   b. En déduire le nombre de suites possibles (grandes et petites).

5. **Le brelan : 3 dés identiques**

   a. A l'aide d'un arbre, donner le nombre de brelans de 5, un 2 et un 4 (avec le 2 et le 4 dans cet ordre).
   Cela revient à déterminer le nombre de manières d'ordonner 3 dés parmi 5, puisque les deux autres sont dans un ordre fixé, et jouent donc un rôle identique.

   b. En déduire le nombre de brelans de 5 avec un 2 et n'importe quel dé différent de 2 et 5 (le 2 et l'autre dé dans cet ordre).

   c. En déduire le nombre de brelans de 5.

   d. En déduire le nombre de brelans possibles.

6. **La double-paire**
   Il s'agit du cas le plus complexe à traiter, car il faut trouver le nombre de manières d'ordonner 3 faces différentes, dont *deux* ayant des rôles particuliers symétriques (les paires) parmi 5 dés. Nous calculerons donc le nombre de double-paires possibles par complémentarité, à la fin.

7. **La Paire**

   a. Lister les branches du premier arbre imaginaire contenant une paire de 4, un 3, un 5 et un 6 (avec les dés 3, 5 et 6 dans cet ordre).
   Cela revient à déterminer le nombre de manières d'ordonner 2 dés parmi 5, puisque les trois autres sont dans un ordre fixé, et jouent donc un rôle identique.

   b. En déduire le nombre de paires de 4 avec un 3, un 5, et n'importe quel dé différent de 4, 3 et 5 (avec le même ordre que précédemment).

   c. En déduire le nombre de paires de 4 avec un 3, et n'importe quels dés distincts, différents de 4 et 3 (avec le même ordre que précédemment).

   d. En déduire le nombre de paires de 4.

   e. En déduire le nombre de paires possibles.

8. **Rien**
   Une rapide analyse de la situation permet de comprendre que l'on a rien lorsque l'on a des dés tous différents, et qu'il ne s'agit pas d'une suite.
   Il s'agit donc de choisir un numéro de face à enlever parmi quatre possibles (le 6 et le 1 donnant des suites).

   a. Déterminer le nombre manières de permuter les nombres 1, 3, 4, 5 et 6.

   b. En déduire le nombre de « rien » possibles .

9. **Retour sur la double-paire**
   Par complémentarité, trouver le nombre de double-paires possibles.

Partie C : Conclusion

1. Déduire des questions précédentes les probabilités de chaque figure.
2. Avait-on des règles cohérentes avec les probabilités d'apparition des figures ?

Réponses (dans l'ordre) : 6, 150, 300, 240, 1200, 3600, 480, 1800 pour 7776 cas.