EXERCICES : PRODUIT SCALAIRE ET APPLICATIONS

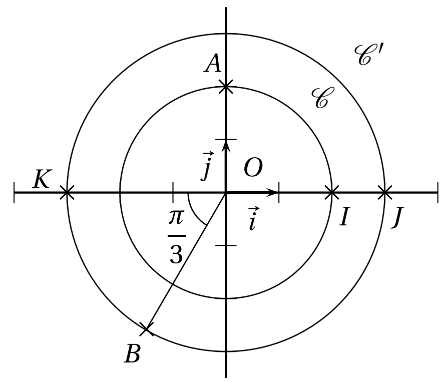
Exercice 1 :

Dans un repère orthonormal, les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(1;1)$, $(3;4)$ et $(3-k;-1)$ où k est un réel.

1. Déterminer le réel k afin que le triangle ABC soit rectangle en A.
2. Démontrer que le triangle ABC est alors isocèle en A.

Exercice 2 :

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, on a tracé deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centre O et de rayons respectifs 2 et 3. Calculer les produits scalaires suivants :



1. $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OJ}$
2. $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OK}$
3. $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OB}$
4. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$
5. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AI}$
6. $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IJ}$

Exercice 3 :

Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$:

1. $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(-1;5)$
2. $\|\vec{u}\|=1$; $\|\vec{v}\|=2$; $(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{2\pi}{3}$ rad
3. $\|\vec{u}\|=2$; $\|\vec{v}\|=3$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|=3$
4. $\|\vec{u}\|=1$; $\|\vec{v}\|=3$; $(\vec{u},\vec{v})=0$ rad
5. $\|\vec{u}\|=2$; $\|\vec{v}\|=3$; $(\vec{u},\vec{v})=\pi$ rad
6. Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormal : $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ et $\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{j}$

Exercice 4 :

On prend le centimètre comme unité. Construire un triangle ABC tel que :

1. $AB=3$, $AC=4$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$
2. $AB=3$, $AC=6$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-9$

Exercice 5 :

ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de $[BC]$.
Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$
2. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CI}$
3. $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AI}$

Exercice 6 :

Soit ABC un triangle et K le projeté orthogonal de A sur (BC). On donne $AB=6$, $BK=4$ et $KC=7$

1. Calculer les produits scalaires suivants $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$.
2. Déterminer et représenter en rouge l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC}=44$

Exercice 7 :

On considère un segment $[AB]$ et O son milieu. Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$ et $M\in\Delta$.
Montrer de deux manières différentes que :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}AB^2$$

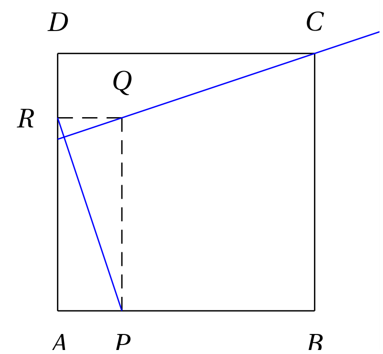
Exercice 8 :

ABC est un triangle dans lequel $AB = 2$ et $AC = 3$. De plus $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$
ABC est-il rectangle ? Si oui, préciser le sommet.

Exercice 9 :

$ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$.
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$. En déduire BD.

Exercice 10 :



Soit $ABCD$ un carré, on construit un rectangle $APQR$ tel que :
- P et R sont sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$ du carré
- $AP = DR$

But : On souhaite montrer que les droites (PR) et (CQ) sont perpendiculaires

1. Montrer que : $\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{CQ} \cdot \left(\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP}\right)$
2. En déduire que les droites (PR) et (CQ) sont perpendiculaires.

Exercice 11 :

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon r et M un point non situé sur $\mathscr{C}$. Deux droites issues de M coupent $\mathscr{C}$ respectivement en A et B et en C et D
But : Montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$
On note A' le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$

1. Faire deux figures suivant que M est à l'intérieur ou à l'extérieur de $\mathscr{C}$
2. Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$
3. **a.** En utilisant la relation de Chasles, démontrer que :

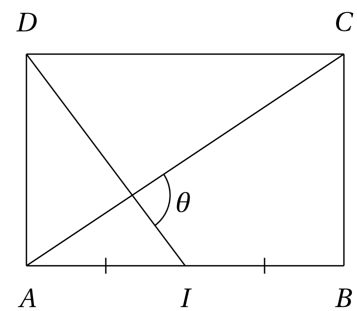
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = MO^2 - r^2$$

   b. En déduire que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$

Note

On montre ainsi que le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est indépendant de la sécante issue de M, il ne dépend que de la distance de M à O. Le réel $MO^2 - r^2$ (qui est nul lorsque M est un point de $\mathscr{C}$) est appelé **puissance de M par rapport à** $\mathscr{C}$. Il est positif lorsque M est à l'extérieur de $\mathscr{C}$ et négatif si M est à l'intérieur de $\mathscr{C}$

Exercice 12 :



$ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 3$ et $AB = 5$. I est le milieu de $[AB]$.

1. Calculer AC et DI.
2. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DI}$.
4. En déduire la valeur de l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{DI}; \overrightarrow{AC}\right)$ à 0,001 près en degrés.

Exercice 13 :

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère un triangle ABC avec $A(-1;2)$, $B(3;1)$ et $C(2;4)$.

1. Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Exercice 14 :

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points suivants :

$$A(2;1) \qquad B(7;2) \qquad C(3;4)$$

Les questions suivantes sont indépendantes et sans rapport :

1. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[BC]$.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. L'angle $\widehat{A}$ est-il droit ?

Exercice 15 :

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère le point $A(3;5)$.
Chercher une équation de la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon OA.

Exercice 16 :

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne $A(-2;2)$ et $B(2;2)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
2. **a.** Montrer que pour tout point M du plan : $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$
   b. Trouver et représenter l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = 14$
3. **a.** Démontrer que, pour tout point M du plan, on a :
   $$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$
   b. Démontrer que l'ensemble E des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = 40$ est un cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon $r = 4$.
   c. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$.
4. Déterminer les coordonnées des (éventuels) points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
5. Soit λ un réel négatif. Comment choisir λ pour que le point $Z(7;\lambda)$ soit sur $\mathscr{C}$?
6. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ en Z.

Exercice 17 :

On considère un segment $[AB]$ avec $AB = 1$ dm. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

1. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 1$
2. $MA^2 + MB^2 = 5$