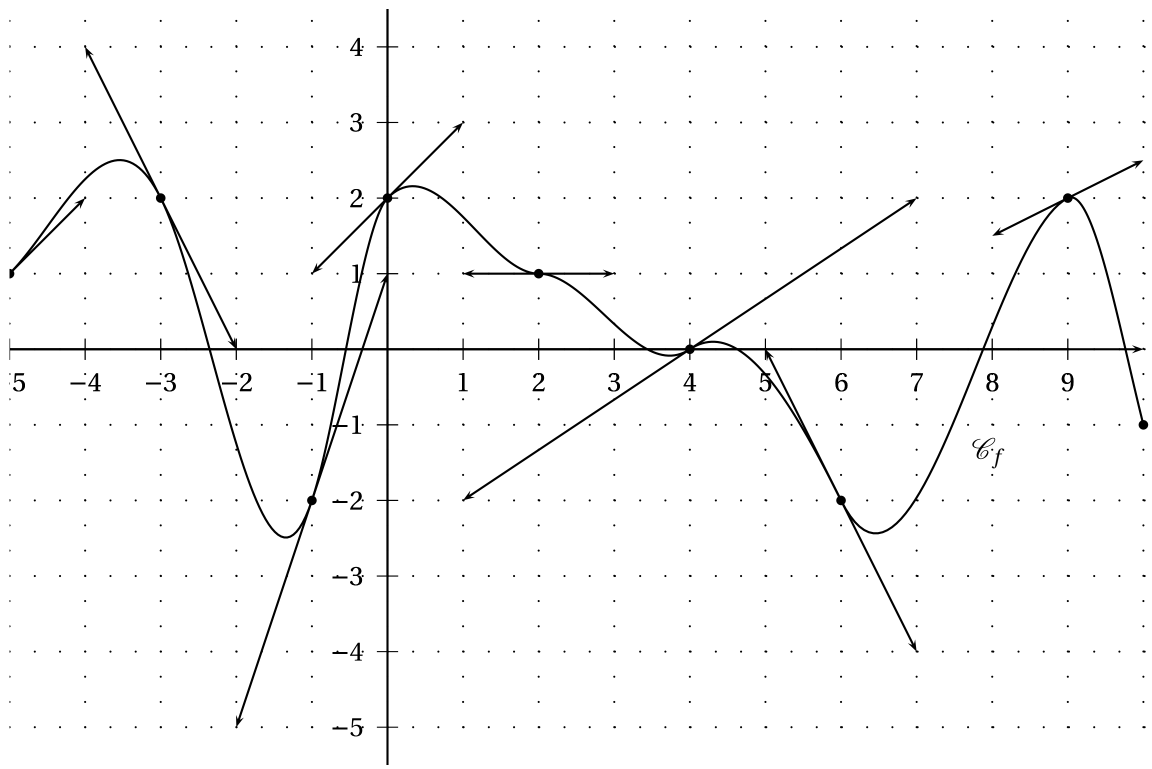
Exercices : Dérivation et applications

Exercice 1 :

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.
Lisez, en vous servant du quadrillage, les nombres dérivés :

$$f'(-5) \qquad f'(-3) \qquad f'(-1) \qquad f'(0) \qquad f'(2) \qquad f'(4) \qquad f'(6) \qquad f'(9)$$

puis retrouver les équations de chacune des tangentes tracées.



Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x + 1$. Soit $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.
Donner (en justifiant) l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f
2. Soit A le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A
3. Soit B le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathscr{C}_f$ en B
4. Tracer sur un même repère T_A, T_B et C_f.

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. Tracer T et $\mathscr{C}_f$ (dans un même repère).
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2;3]$.
6. Donner une valeur approchée de α, par défaut, à 10^{-1} près.

Exercice 5 :

Le but de cet exercice est de calculer la limite suivante :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^{2005} - 1}{h}$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^{2005}$

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f. Puis calculer $f'(0)$.
2. Calculer le taux de variation de la fonction f entre 0 et h.
3. Conclure.

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.
Etudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 7 :

Une parabole P admet, dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, une équation du type :

$$y = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$

Déterminer les coefficients a, b et c sachant que P coupe l'axe des abscisses $(O;\vec{i})$ au point A d'abscisse 3, l'axe des ordonnées $(O;\vec{j})$ au point B d'ordonnée 2 et qu'elle admette en ce point la droite d'équation $y = x + 2$ pour tangente. Contrôler graphiquement vos résultats.
Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de P avec $(O;\vec{i})$

Exercice 8 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

1. Démontrer que f est une fonction impaire, ie : $\begin{cases} \text{L'ensemble } D_f \text{ de définition de } f \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \text{Pour tout } x \in D_f \text{, on a } f(-x) = -f(x) \end{cases}$
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f
3. Quel est le signe du dénominateur de $f'(x)$?
4. Résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f en précisant la valeur M de son maximum et la valeur m de son minimum
6. Tracer (soigneusement) la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-4;4]$