EXERCICES : VECTEURS ET DROITES

Exercice 1 :

Déterminer le(s) valeur(s) de k telle(s) que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ k+1 \end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix} -k+1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}\begin{pmatrix} k^2+17 \\ 5k-4 \end{pmatrix}$

Exercice 2 :

1. Trouver un réel x tel que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \cos^2(x) \\ -3\sin(x)+6 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}\begin{pmatrix} \sin(x) \\ 3 \end{pmatrix}$ soient colinéaires
2. L'opposé de la valeur trouvée précédemment est-elle aussi une solution ?
3. Etes-vous capable de donner d'autres solutions ? toutes les solutions ?

Exercice 3 :

Vrai ou Faux :

1. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3^{22} \\ \frac{1}{3^{25}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3^{71} \\ 9^{12} \end{pmatrix}$ sont colinéaires.
2. Si $\vec{u} = k\vec{v}$ alors il existe k' tel que $\vec{v} = k'\vec{u}$.
3. $\vec{0} = k\vec{0}$
4. $\vec{0} = 0\vec{u}$
5. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ est colinéaire au(x) vecteur(s)

   a. $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b.** $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **c.** $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **d.** $\vec{z}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. Si deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ sont colinéaires alors :

   a. $a'b - ab' = 0$
   b. $ab' - a'b = 0$
   c. $ab' = a'b$
   d. $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$
   e. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

Exercice 4 :

1. Tracer un quadrilatère quelconque $ABCD$.
   Placer les milieux respectifs I, J, K et L des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.
2. Prouver que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 5 :

Soit EFG un triangle. Le point I est tel que $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GF}$ et H est l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{FE}$. Le point O est le milieu de $[EG]$.

1. Faire une figure.
2. Expliquer pourquoi $\left(F;\overrightarrow{FG};\overrightarrow{FE}\right)$ est un repère du plan.
3. En se plaçant dans ce repère, démontrer que les points I, O et H sont alignés.

Exercice 6 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O tel que $AB = 6$ cm.

1. Placer les points E et F tels que $\overrightarrow{CE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
2. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{OE}$ dans les repères suivants :

   a. $\left(D;\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)$
   b. $\left(A;\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)$
   c. $\left(C;\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$
   d. $\left(C;\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)$
   e. $\left(O;\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)$

Exercice 7 :

Soit $ABCD$ un carré de côté a ($a > 0$). On considère les deux triangles équilatéraux DCE et DAF extérieurs au carré $ABCD$.
Démontrer que les droites (AC) et (EF) sont parallèles, en vous plaçant dans le repère orthormé $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$.

Exercice 8 :

$ABCD$ est un tétraèdre. Dans le plan (ABC) on définit le point K par $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Faire un figure dans l'espace, puis une figure dans le plan (ABC).
2. En choisissant un repère du plan (ABC), démontrer que K appartient à $[BC]$.

Exercice 9 :

ABC est un triangle. I est le milieu de $[BC]$ et M est un point de la parallèle à (AB) passant par I.
La parallèle à (AC) passant par I coupe la parallèle à (BC) passant par M en N.

1. **a.** Réaliser une figure avec un logiciel de géométrie.
   b. Semble-t-il exister une position du point M pour laquelle :
   - $M = N$?
   - $BCMN$ est un parallélogramme ?
   - $BCNM$ est un parallélogramme ?
2. On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.
   a. Justifier que les coordonnées du point M peuvent s'écrire $\left(k;\frac{1}{2}\right)$ où k désigne un nombre réel.
   b. Exprimer les coordonnées de N en fonction de k.
   c. Justifier les conjectures émises à la question 1.b..