Chapitre 7

Dérivation et applications

Hors Sujet

Titre : « Death Note »

Auteur : Oba et Obata

Présentation succinte de l'auteur : *Death Note* est un manga de type shônen, créé par le scénariste Tsugumi Oba et le dessinateur Takeshi Obata. Il a été prépublié dans un journal de 2003 à 2006, et par la suite publiée en douze tankôbon de 2004 à 2006.

L'histoire est centrée sur *Raito Yagami*, un lycéen surdoué qui juge le monde actuel criminel et corrompu. Sa vie change du tout au tout le jour où il ramasse par hasard un mystérieux cahier intitulé « Death Note ». Ancienne propriété d'un dieu de la mort, le Death Note permet à son utilisateur de tuer toute personne dont il connaît le nom et le visage. Raito décide d'utiliser le Death Note pour exterminer les criminels, dans le but d'éradiquer le Mal et de bâtir un monde parfait dont il sera le dieu.

Mais les nombreuses morts inexpliquées de criminels à travers le monde attirent l'attention d'Interpol et du mystérieux *L*, un détective capable de résoudre n'importe quelle énigme, mais dont personne ne connaît ni le visage ni le nom. L décide d'enquêter pour capturer le tueur en série, surnommé par le grand public « Kira ». Entre Raito et L, tous deux persuadés d'agir pour la justice, s'engage un combat acharné pour découvrir en premier l'identité de l'autre...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée !* »
JOHN LOUIS VON NEUMANN

LEÇON 7

Dérivation et applications

Au fil du temps

En mathématiques, la dérivation élémentaire est le calcul permettant de définir une variation de phénomène par unité de temps ou par unité géométrique. La dérivée f' d'une fonction f en un point x_0 ne fait rien d'autre que d'indiquer la valeur de la pente de la fonction en ce point : par exemple, si la pente au point x_0, appelé nombre dérivé de f en x_0 et que l'on note $f'(x_0)$, est positive, alors c'est que la courbe de la fonction est orientée « vers le haut » en ce point (elle est croissante) et la valeur de $f'(x_0)$ indique si cette montée est plutôt douce ou forte. De même, si $f'(x_0)$ est négative, la courbe est « descendante » en ce point, et si $f'(x_0) = 0$, la courbe y connaît un répit horizontal. En bref, la fonction dérivée f' n'a pour rôle que de donner toutes les informations sur les variations de f ...
Pourtant, la découverte des fonctions dérivées ne se fit qu'au XVII^e et a été l'un des moments forts des mathématiques.
Ceci a obligé les mathématiciens à raisonner en termes de sommes infinies d'éléments « infiniment petits », pour lesquels il a fallu inventer des règles et des opérations. La dérivation a également été une extraordinaire découverte pour la Physique : la connaissance des variations d'une fonction s'est révélée essentielles à la description des phénomènes naturels car les théories physiques parlent avant tout des variations de la nature.

Il faut dire que, dès les premières décennies du XVII^e, l'étude des « courbes » géométriques, inaugurée par les Grecs anciens, s'est déjà transformée en l'étude de fonctions plus générales. C'est Blaise Pascal qui, le premier, mène des études sur la notion de tangente à une courbe - lui-même les appelait « touchantes ». Grâce aux travaux de Fermat, on sait également qu'une fonction (continue) change son mode de variation en passant par un point où sa tangente a une pente nulle, l'extremum, ce qui renseigne sur la forme géométrique de cette fonction. Mais l'ambition des mathématiciens du XVII^e siècle est bien plus générale : il s'agit pour eux de montrer qu'une fonction contient dans son expression mathématique toutes les informations sur ses tangentes et, inversement, que les informations données par les tangentes à une fonction inconnue doivent permettre de reconstruire celle-ci (ce qui équivaut à reconstruire un trajet en voiture à partir uniquement de ses variations de vitesse et de direction).
Mais cette intuition sur le lien entre la fonction et ses tangentes se heurte à un problème : le nombre de tangentes à une courbe est infini car chaque point à la sienne ! Comme les mathématiciens de l'époque ne savent pas raisonner avec l'infini, il leur parait impossible de calculer la pente exacte d'une tangente au point $(x; f(x))$, d'autant plus qu'au sens géométrique un point n'a pas de tangente !

Cependant, dès la seconde moitié du XVII^e siècle, le domaine mathématique de l'analyse numérique connait une avancée prodigieuse grâce aux travaux de Newton et de Leibniz en matière de calcul différentiel et intégral. La notion de nombre dérivée se retrouve pour la première fois dans leurs écrits, sous le nom « fluxion », et défini comme « le quotient ultime de deux accroissements évanescents ».
Entre 1660 et 1675, Leibniz et Newton découvrent, chacun de leur côté et indépendamment, une nouvelle mathématique qui permet de raisonner sur des segments « infiniment petits » d'une fonction f. L'idée essentielle est que si l'on considère des segments de plus en plus proche de sa courbe, alors leur tangente tend à se confondre avec le segment lui-même : du coup, sa pente se déduit directement de l'expression de la fonction f.
Néanmoins la théorie du calcul infinitésimal, tout juste éclose, n'est pas encore pourvue de toute la rigueur mathématique qu'elle aurait exigée, et notamment la notion d'infiniment petit qui tient plus de l'intuitif, et qui pourrait engendrer des erreurs dès lors que l'on ne s'entend pas bien sur ce qui est ou non négligeable.

Au XVIII^e siècle Lagrange utilise la notation $f'(x)$, aujourd'hui tout à fait usuelle, pour désigner le nombre dérivé de f en x, tandis que d'Alembert introduit la définition plus rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement - sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours. Cependant, à l'époque de d'Alembert, c'est la notion de limite qui pose problème : elle n'est pas encore construite formellement !
C'est seulement avec les travaux de Weierstrass au milieu du XIX^e siècle que le concept de dérivée sera entièrement formalisé.

I) Nombre dérivé

I-1 Limite du taux de variation d'une fonction

Travail de l'élève **1.**

Introduction : En Syldavie, on aime passer le temps en lâchant des billes sans vitesse initiale du haut des balcons, des tours, des falaises, etc ... et observer ce qui se passe.

En cinématique, chacun a appris que la distance parcourue en mètres par une au bout de t secondes est :

$$d(t) = \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{où } g \simeq 9.8 m.s^{-2}$$

1. Calculer la vitesse moyenne d'une bille dans les intervalles de temps $[0;1]$, $[1;4.5]$ et $[4.5;5]$.
2. Proposer une méthode pour trouver une valeur approchée de la vitesse instantanée de la bille au bout de 2 s.

On veut en réalité évaluer la vitesse instantanée de la bille au bout de t secondes. **Partie A : Le point de vue cinématique**

1. Soit h un réel strictement positif.
   Calculer la vitesse moyenne de la bille en chute libre dans les intervalles de temps $[t; t+h]$ et $[t-h; t]$.
   Vérifier les résultats sur : $t_0 = 2$s et $h = 0,1$s.
2. « La vitesse instantanée à l'instant t est $v(t) = 9.8t$ m.s^{-1} ». Expliquer cette affirmation.
3. **Application** : une bille est lâchée sans vitesse initiale d'une altitude de 25 mètres. Quelle est, en km/h, sa vitesse au moment de l'impact avec le sol ?

Remarque : La quantité $\dfrac{d(t+h)-d(t)}{h}$ s'appelle le **taux de variation** (ou d'**accroissement**) de la fonction d entre t et $t+h$.
Cette quantité est définie pour h non nul et tel que $t+h$ soit dans l'intervalle de définition de d.

Dans tout ce qui suit, on appelle a un nombre réel, f une fonction définie sur un intervalle I contenant a et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$.

Définition 1 :

On dit que f est dérivable en a si le taux de variation (ou d'accroissement) $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ devient aussi proche que l'on veut d'un nombre réel ℓ lorsque h est suffisamment proche de 0.
Autrement dit, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel ℓ lorsque h tend vers 0 et on note

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$$

Le nombre ℓ est alors appelé le nombre dérivé de la fonction f en a. On le note $f'(a)$.

Exemples :

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5$ et $g(x) = x^2 + 3x - 4$.
f est-elle dérivable en 2 ?
g est-elle dérivable pour tout réel a ?

Solution :

Cherchons $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)^3-5-2^3+5}{h}=\frac{12h+6h^2+h^3}{h}=12+6h+h^2$$

Comme $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=12$, f est dérivable en 2 et on a $f'(2)=12$.

Cherchons le taux de variation de g entre a et $a+h$:

$$g(a+h)-g(a)=(a+h)^2+3(a+h)-4-\left(a^2+3a-4\right)=a^2+2ah+h^2+3a+3h-4-a^2-3a+4=h(2a+3)+h^2$$

$$\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\frac{h(2a+3)+h^2}{h}=2a+3+h \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0}2a+3+h=2a+3$$

Par conséquent la fonction g est dérivable pour tout réel a et on a $g'(a)=2a+3$.
Par exemple, le nombre dérivé de g en 5 est $g'(5)=13$.

Exercices du livre :

n° 40 p 74 + 48 p 76

I-2 Interprétation graphique

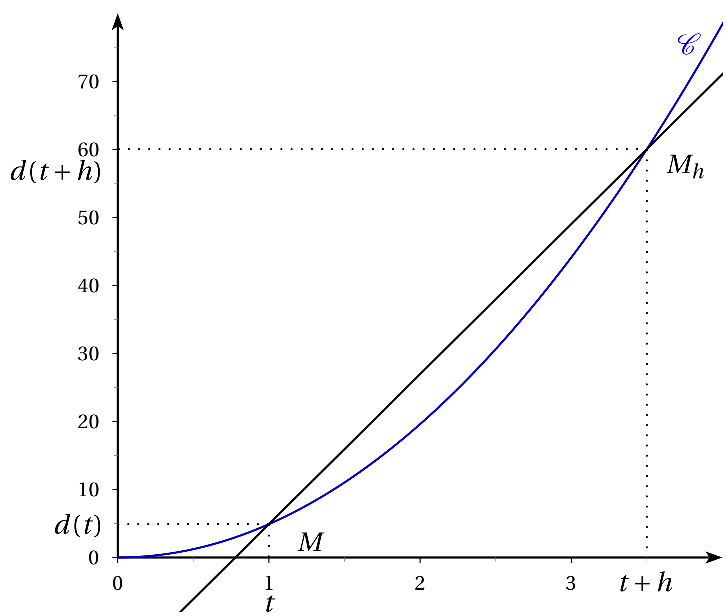
Travail de l'élève **2.** On reprend l'activité précédente, d'un point de vue graphique.

Partie B : Le point de vue graphique

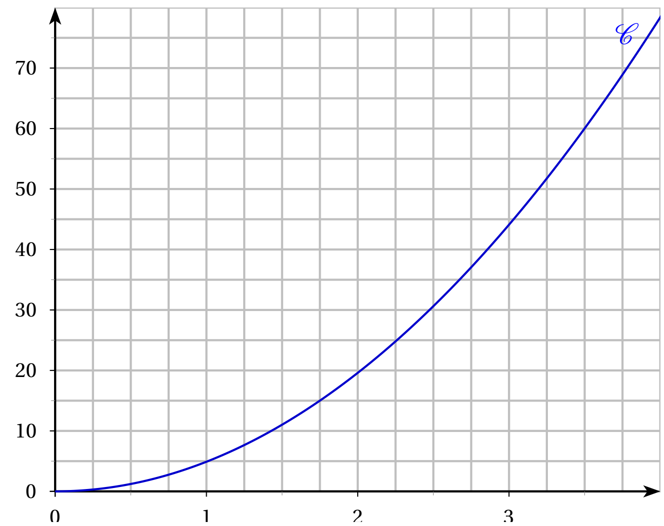
Dans géogébra, on a créé :

- la courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction d sur l'intervalle $[0;5]$ (échelle : X :Y = 1 :20).
- un point M quelconque sur la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisse t,
- un curseur h allant de -5 à 5, d'incrémentation 0.01,
- le point M_h de la courbe $\mathscr{C}$ et d'abscisse $t+h$,
- la droite (MM_h),

A ce stade, on fait varier le curseur h pour observer le comportement de la droite (MM_h).

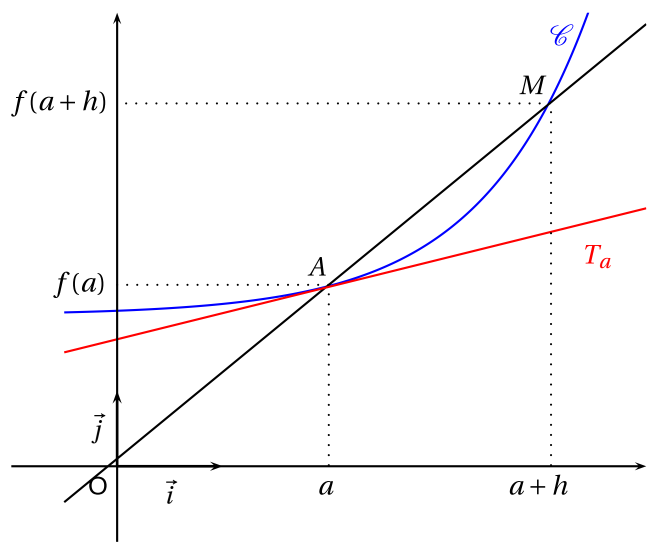


1. Calculer le coefficient directeur de la droite (MM_h). Quel lien peut-on établir avec la partie A ?
2. On appelle $\Delta(t)$ la droite qui passe par M et de coefficient directeur $9.8t$.
   Sur le graphique ci-dessous, construire la droite $\Delta(t)$ lorsque $t=0,5$; puis lorsque $t=1$ et $t=3$.
   Que constate-t-on ? Quel lien peut-on établir avec la partie A ?



Remarque : La quantité $\Delta(t)$ de pente $v(t)$ et passant par M est tangente à la courbe $\mathscr{C}$.

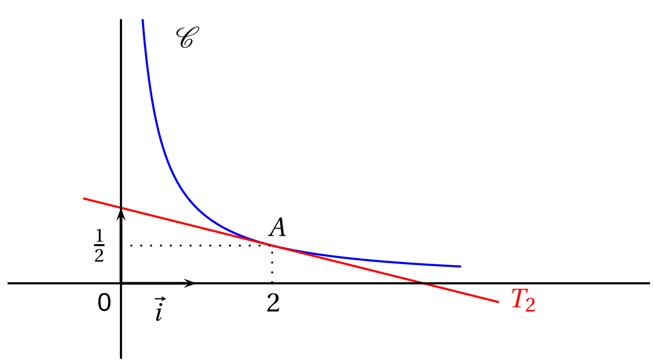
Propriété 1 :
Soit f une fonction dérivable en a et A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a.



Exemple :
f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Dans le repère ci-contre, $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de f et T_2 la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 2.
Lire sur le graphique le nombre dérivé de f en 2.



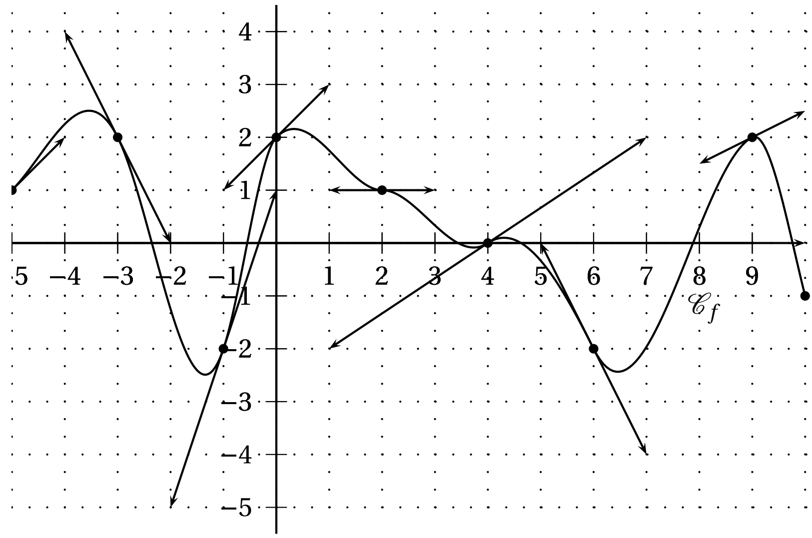
Exercice 1 :

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-contre. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.
Lisez, en vous servant du quadrillage, les nombres dérivés :

$f'(-5)$ $f'(-3)$ $f'(-1)$ $f'(0)$

$f'(2)$ $f'(4)$ $f'(6)$ $f'(9)$

puis retrouver les équations de chacune des tangentes tracées.



Exercices du livre :
n° 42-43-44-45 p 74

I-3 Equation de la tangente

On considère une fonction f dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Soit A le point d'abscisse a de $\mathscr{C}_f$.
D'après la partie précédente, l'équation de la tangente T_a à $\mathscr{C}$ passant par A est de la forme :

$$y = mx + p \qquad \text{avec } m = f'(a)$$

De plus, comme $A(a; f(a))$ est un point de T_a, les coordonnées de A vérifient l'équation de T_a :

$$f(a) = f'(a)a + p \Longleftrightarrow p = f(a) - f'(a)a$$

Au final l'équation de T_a est $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a \Longleftrightarrow y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Propriété 2 :
Une équation de la tangente au point d'abscisse a d'une fonction f dérivable en a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exercices du livre :
n° 49-50 p 76

II) Fonction dérivée

II-1 Définitions

Définition 2 :
On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I si f est dérivable pour tout $a \in I$.

Exemple :
Nous avons vu dans un exemple précédent, que la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3x - 4$ est dérivable pour tout réel a et que son nombre dérivé en a est $f'(a) = 2a + 3$.
On dit donc que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Il est donc naturel de définir une nouvelle fonction qui à x associe le nombre dérivé $f'(x)$. Cette fonction s'appelle la dérivée de f et se note f'.
La dérivée de la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 3x - 4$ est donc $f' : x \longmapsto 2x + 3$ qui est définie sur $\mathbb{R}$.

Définition 3 :
Soit f une fonction dérivable sur I. On appelle fonction dérivée, que l'on note f', la fonction qui à $x \in I$ associe $f'(x)$.

II-2 Dérivées des fonctions de références

Travail de l'élève **3.** Calculer (s'il existe) le nombre dérivé $f'(a)$ d'une fonction constante $f(x) = k$, d'une fonction affine $g(x) = mx + p$, de la fonction « carré » $h(x) = x^2$, et enfin de la fonction « racine carrée » $s(x) = \sqrt{x}$. En déduire les fonctions dérivées de chacune, en précisant leur ensemble de définition.

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
k (nombre fixé)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2 (fonction carrée)	$2x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$ (fonction inverse)	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
x^n, $n \in \mathbb{Z}^*$ (fonction puissance)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$ (fonction racine)	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$

Preuve

A titre d'exemple, démontrons le pour le cas de la fonction inverse :
Pour tous réels $a \neq 0$ et $h \neq 0$ avec $a+h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{a-(a+h)}{ha(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

ce qui tend vers $-\frac{1}{a^2}$ lorsque h tend vers 0.

Exemples :

Calculer la dérivée de la fonction cube et la dérivée de l'inverse de la fonction carré.

II-3 Opérations sur les dérivées

Dans le tableau suivant, u et v sont deux **fonctions** dérivables sur un intervalle I et k désigne un nombre réel. Remarquons que les fonctions ci-dessous sont dérivables sur I.

Fonctions	Dérivées	Exemples
ku	ku'	Si $f(x)=5x^3$ alors $f'(x)=5\times 3x^2=15x^2$
$u+v$	$u'+v'$	Si $f(x)=x+\frac{1}{x}$ alors $f'(x)=1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)=1-\frac{1}{x^2}$
$u\times v$	$u'v+uv'$	Si $f(x)=x\sqrt{x}$ alors $f'(x)=1\times\sqrt{x}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}=\frac{2x+x}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$
u^n, $n\in\mathbb{Z}^*$	$nu'u^{n-1}$	Si $f(x)=(5x+3)^7$ alors $f'(x)=7\times 5\times(5x+3)^6=35(5x+3)^6$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	Si $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ alors $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2-1)^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	Si $f(x)=\frac{3x+2}{4-2x}$ alors $f'(x)=\frac{3(4-2x)-(3x+2)\times(-2)}{(4-2x)^2}=\frac{16}{(4-2x)^2}$

Donner ci-dessous les calculs intermédiaires de chaque exemple ...

Preuve **HP**

1. Pour tous réels a et $a+h$ de l'intervalle I, avec $h \neq 0$ on a :

$$\frac{(ku)(a+h)-(ku)(a)}{h} = \frac{ku(a+h)-ku(a)}{h} = k\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$$

ce qui tend vers $ku'(a)$ quand $h \longrightarrow 0$

2. Pour tous réels a et $a+h$ de l'intervalle I, avec $h \neq 0$ on a :

$$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

ce qui tend vers $u'(a)+v'(a)$ quand $h \longrightarrow 0$

3. Pour tous réels a et $a+h$ de l'intervalle I, avec $h \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} &= \frac{u(a+h)\times v(a+h)-u(a)\times v(a)}{h}\\ &= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)-v(a)u(a+h)+v(a)u(a+h)}{h}\\ &= v(a)\frac{u(a+h)-u(a)}{h}+u(a)\frac{v(a+h)+v(a)}{h}\end{aligned}$$

ce qui tend vers $u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$ lorsque $h \longrightarrow 0$

4. Seul le cas $n=2$ est faisable en $1S$. En effet la démonstration dans le cas où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3 et beaucoup moins facile et utilise des arguments que nous n'avons pas encore abordés…

Pour $n=2$, donc si $f=u^2=u\times u$, on applique la formule pour la dérivée du produit et on obtient (donc en prenant $v=u$) :

$$f'=u'u+uu'=2uu'$$

Pour $n=3$, donc lorsque $f=u^3=u^2\times u$, on applique le résultat précédent et la formule du produit (en prenant cette fois $v=u^2$) et on obtient :

$$f'=u'u^2+u\times 2uu'=u^2u'+2u^2u'=3u^2u'$$

On procéderait de même pour le cas $n=4$, puis pour le cas $n=5$, …. Cette technique ne permet néanmoins pas de généraliser dans le cas où n est quelconque, c'est pourquoi on utilisera en terminale S un nouveau type de raisonnement (le raisonnement par récurrence), pour généraliser ce type de propriété ! !

5. Pour tous réels a et $a+h$ de l'intervalle I, avec $h \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{v}(a+h)-\frac{1}{v}(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{v(a+h)}-\frac{1}{v(a)}}{h}\\ &= \left(\frac{1}{v(a+h)}-\frac{1}{v(a)}\right)\times\frac{1}{h}\\ &= \frac{v(a)-v(a+h)}{v(a+h)v(a)}\times\frac{1}{h}\\ &= -\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\times\frac{1}{v(a+h)v(a)}\end{aligned}$$

ce qui tend vers $-v'(a)\times\dfrac{1}{v(a)\times v(a)}=-\dfrac{v'(a)}{v^2(a)}$ lorsque $h \longrightarrow 0$

Preuve (Suite)

6. On déduit $(\frac{u}{v})'$ de la formule précédente et de celle du produit, pour obtenir :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u\times\frac{1}{v}\right)' = u'\times\frac{1}{v} + u\times\left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Remarque : Notons que nous ne savons pas encore dériver n'importe quelle type de fonction connue. Par exemple, nous ne savons pas dériver les fonctions trigonométriques, ni les fonctions du type $\sqrt{3x-1}$.
Et pour les fonctions contenant une valeur absolue, on doit les écrire sans, ou alors distinguer les cas.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x + 1$. Soit $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.
Donner (en justifiant) l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f
2. Soit A le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A
3. Soit B le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathscr{C}_f$ en B
4. Tracer sur un même repère T_A, T_B et C_f.

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. Tracer T et $\mathscr{C}_f$ (dans un même repère).
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2;3]$.
6. Donner une valeur approchée de α, par défaut, à 10^{-1} près.

Exercice 5 :

Le but de cet exercice est de calculer la limite suivante :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^{2005}-1}{h}$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^{2005}$

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f. Puis calculer $f'(0)$.
2. Calculer le taux de variation de la fonction f entre 0 et h.
3. Conclure.

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

Etudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 7 :

Une parabole P admet, dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, une équation du type :

$$y = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$

Déterminer les coefficients a, b et c sachant que P coupe l'axe des abscisses $(O;\vec{i})$ au point A d'abscisse 3, l'axe des ordonnées $(O;\vec{j})$ au point B d'ordonnée 2 et qu'elle admette en ce point la droite d'équation $y = x+2$ pour tangente. Contrôler graphiquement vos résultats.

Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de P avec $(O;\vec{i})$.

Exercices du livre :

n° 56-57 + 59-60-61 p 77 (calculs) + n° 65-66-67-70-74 p 78

III) Applications

III-1 Signe de la dérivée et variation

Théorème 1 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

1. f est croissante sur I si, et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$
2. f est constante sur I si, et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$
3. f est décroissante sur I si, et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$

Preuve

$\Rightarrow$) Soit x un réel de I et h un réel non nul tels que $x+h \in I$.

1. – Si $h > 0$, alors $x+h \geq x$ et comme f est croissante sur I, $f(x+h) \geq f(x) \Longleftrightarrow f(x+h) - f(x) \geq 0$
   – Si $h < 0$, alors $x+h \leq x$ et comme f est croissante sur I, $f(x+h) \leq f(x) \Longleftrightarrow f(x+h) - f(x) \leq 0$

   Dans tous les cas, $f(x+h) - f(x)$ et h sont de mêmes signes, donc :

   $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

   f est dérivable en x donc $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ a une limite réeel $f'(x)$ lorsque h tend vers 0

   Si l'on donne à h des valeurs proches de 0, alors $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ prend des valeurs positives, on admet ici que sa limite en 0 est aussi positive, i.e que $f'(x) \geq 0$
2. f est constante sur I, donc $f(x+h) = f(x)$ et $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$, par conséquent $f'(x) = 0$

Preuve (Suite)

3. De façon analogue à la première partie, on démontre cette fois que $f(x+h)-f(x)$ et h sont de signes contraires. Ainsi $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$ Si l'on donne à h des valeurs proches de 0, alors $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ prend des valeurs négatives, on admet ici que sa limite en 0 est aussi négative, i.e que $f'(x) \leq 0$

$\Leftarrow$) **1.** On suppose ici que $f'(a) \geq 0$ pour tout $a \in I$, montrons que la fonction f est croissante sur I :
Soit $a \in I$, par définition $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$.

– Si $h > 0$, alors $a+h \geq a$ et on veut montrer que $f(a+h)-f(a) > 0$, pour h suffisament petit. Or :

$$f(a+h)-f(a) = f'(a)h + h\varphi(h) \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

$f'(a)h \geq 0$ et comme $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$, il existe un nombre H tel que pour $h < H$, $f'(a)h + h\varphi(h) \geq 0$, ce qui montre que pour $h < H$, $f(a+h) > f(a)$

– Si $h < 0$, alors alors $a+h \geq a$ et on veut montrer que $f(a+h)-f(a) < 0$, pour h suffisament petit. Or :

$$f(a+h)-f(a) = f'(a)h + h\varphi(h) \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

$f'(a)h \leq 0$ et comme $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$, il existe un nombre H tel que pour $h < H$, $f'(a)h + h\varphi(h) \leq 0$, ce qui montre que pour $h < H$, $f(a+h) < f(a)$

Par conséquent comme ce qu'on vient de faire est vraie pour tout $a \in I$ la fonction f est croissante sur I. (La démonstration n'est pas au programme de 1S, car on utilise la définition formelle des limites qui n'est pas au programme ...)
Pour les autres cas on procède de même.

Exemple :

Etablir les tableaux de variations des fonctions f, g et h définies par :

$$f(x) = -3x^2 + 2x - 1 \qquad g(x) = \frac{3x+4}{5x-7} \qquad h(x) = \frac{-3x^2+2x-3}{x^2+1}$$

Exercices du livre :

n° 77 à 81 p 80 (graphiques) + n° 84-85-88-89-90-92-94 p 83 (calculs)

III-2 Extremum local

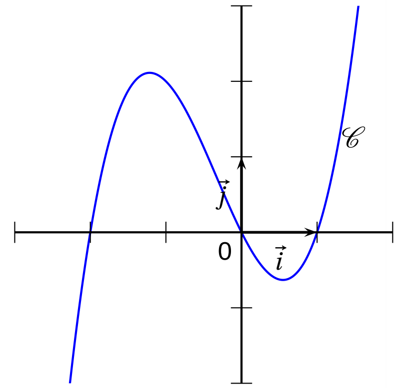
Définition 4 :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel de I.

1. Dire $f(a)$ est un maximum local (resp. minimum local) de f signifie que l'on peut trouver un intervalle **ouvert** J inclus dans I et contenant a tel que pour tout x de J on ait $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$)
2. Dire que $f(a)$ est un extremum local signifie soit que $f(a)$ est un maximum local, soit que $f(a)$ est un minimum local.

Exemple :

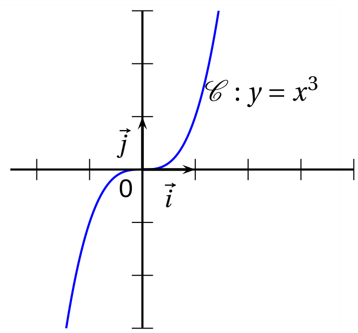
Ci-contre $\mathscr{C}$ la représentation graphique d'une fonction définie sur $[-3;2]$.
On constate que $2,1$ est un extremum local car pour tout $x \in [-2;0]$ on a $f(x) \leq 2,1 = f(-1,2)$
De même, $f(0,6) = -0,6$ est un minimul locar car pour tout $x \in [0;1]$ on a $f(x) \geq -0,6$



Propriété 3 :

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I et a est un réel de I.
Si $f(a)$ est un extremum local de f, alors $f'(a) = 0$

Remarque : La réciproque de ce théorème est fausse. Considérons par exemple le cas de la fonction cube, dont la dérivée s'annule en 0 qui n'est pourtant pas un extremum local.
Il faut ajouter une hypothèse pour avoir le résultat réciproque, comme suit :



Propriété 4 :

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors $f(a)$ est un extremum local.

Remarque : Nous admettrons ces deux propriétés.

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$

Exercice 8 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

1. Démontrer que f est une fonction impaire, ie : $\begin{cases} \text{L'ensemble } D_f \text{ de définition de } f \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \text{Pour tout } x \in D_f \text{, on a } f(-x) = -f(x) \end{cases}$
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f
3. Quel est le signe du dénominateur de $f'(x)$?
4. Résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f en précisant la valeur M de son maximum et la valeur m de son minimum
6. Tracer (soigneusement) la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-4; 4]$

Exercices du livre :

n° 95-96-97 p 80

« La physique est bien trop dure pour les phycisiens »

DAVID HILBERT, mathématicien