CHAPITRE 6

LES SUITES NUMÉRIQUES

HORS SUJET

TITRE : « Death Note »

AUTEUR : OBA ET OBATA

PRÉSENTATION SUCCINTE DE L'AUTEUR : *Death Note* est un manga de type shônen, créé par le scénariste Tsugumi Oba et le dessinateur Takeshi Obata. Il a été prépublié dans un journal de 2003 à 2006, et par la suite publiée en douze tankôbon de 2004 à 2006.

L'histoire est centrée sur *Raito Yagami*, un lycéen surdoué qui juge le monde actuel criminel et corrompu. Sa vie change du tout au tout le jour où il ramasse par hasard un mystérieux cahier intitulé « Death Note ». Ancienne propriété d'un dieu de la mort, le Death Note permet à son utilisateur de tuer toute personne dont il connaît le nom et le visage. Raito décide d'utiliser le Death Note pour exterminer les criminels, dans le but d'éradiquer le Mal et de bâtir un monde parfait dont il sera le dieu.

Mais les nombreuses morts inexpliquées de criminels à travers le monde attirent l'attention d'Interpol et du mystérieux *L*, un détective capable de résoudre n'importe quelle énigme, mais dont personne ne connaît ni le visage ni le nom. L décide d'enquêter pour capturer le tueur en série, surnommé par le grand public « Kira ». Entre Raito et L, tous deux persuadés d'agir pour la justice, s'engage un combat acharné pour découvrir en premier l'identité de l'autre...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée !* »
JOHN LOUIS VON NEUMANN

LEÇON 6

Les suites numériques

Au fil du temps

Vous allez dans ce chapitre, découvrir les suites, qui sont présentes dans bien des sciences, par exemple en biologie des populations pour décrire le cycle de reproduction des lapins, en astronomie dans les loirs de répartition des planètes, en physique dans la théorie des particules élémentaires, en informatique dans les algorithmes et simulations (et via les ordinateurs, dans toutes nos activités numériques). Mais cette omniprésence n'est pas un hasard, car tous ces domaines se servent d'équations mathématiques. Or les suites occupent une place de choix en mathématiques depuis plus de 2000 ans.

Pourquoi un tel intêret, alors qu'il s'agit simplement de ranger une succession de nombres liés par un loi, comme quand on énumère les jours du mois ? Parce que cette simplicité n'est qu'apparente : l'étrange n'est jamais loin.
Prenons par exemple la suite des « puissances de un demi » : $1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16};\ldots;\frac{1}{2n};\ldots$ et la série associée $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2n}+\ldots$ Si ces nombres représentaient des tiges en bois mesurant chacune la moitié de la précédente (en commençant par 1 mètre), n'est-ce pas étonnant que la longueur maximale qu'on puisse atteindre en les mettant bout à bout ne dépasse pas 2 mètres, même avec une infinité de tiges ? Cela a stupéfait les savants qui l'ont découvert au $XVIII^e$ siècle. Comment admettre que l'infini (le nombre de tiges) puisse être contenu dans le fini (2 mètres) ? Il s'en est suivi de violentes disputes entre les pro-infini et les contre, qui n'ont fait que s'amplifier jusqu'au XX^e siècle. Bref, ce sont les suites qui ont introduit l'infini dans l'arithmétique et l'analyse ...

Mais si le $XVIII^e$ siècle est un tournant dans l'histoire des suites et de l'infini, leur origine remonte à Archimède de Syracuse, le mathématicien grec du III^e siècle avant JC. Archimède voulait résoudre une question qui n'avait rien à voir avec l'infini, le problème de la quadrature du cercle, grande énigme des maths anciennes : étant donné un cercle, comment construire une figure de même surface mais composée de carrés ou de triangles (figures que les Grecs savaient bien mesurer). Tel était le but d'Archimède ... Mais à la place, il a découvert les suites et, sans le savoir, il a mis les mathématiciens sur la voie de l'infini.
Comment cela s'est-il produit ? Archimède pensait que la bonne méthode pour « quarrer » le cercle était de l'encadrer entre deux figures faites de triangles, puis de faire converger la taille de ces triangles jusqu'à les faire coïncider (comme si l'on cherchait à emprisonner un objet entre des murs qui se rapprochent). Archimède choisit comme figures connues et quarrables pour coïncer le cercle, les polygones réguliers, faits de triangles disposés en pétales de fleur, en commençant par l'hexagone (six côtés, six triangles équilatéraux) : il encadre le cercle entre l'hexagone inscrit et l'hexagone circonscrit. Ensuite, il passe au dodécagone (12 côtés), puis il enchaîne sur le polygone à 24 côtés, puis 48 et enfin 96. A chaque pas, les mesures se rapprochent, mais jamais elles ne s'égalent ... Il obtient ainsi une suite illimitée de nombres connus dont la limite est 2π et qui fournissent très rapidement une bonne approximation de π.
Las, Archimède ne résoudra jamais le problème de la quadrature du cercle, et pour cause. Les mathématiciens du XIX^e siècle démontreront qu'il n'a pas de solution, d'où l'expression « C'est la quadrature du cercle ! ». Mais Archimède a bel et bien inauguré l'histoire des suites, car dans sa méthode, il montre comment calculer la surface du polygone n en fonction de celui qui précède (le $n-1^{eme}$). Le terme u_n défini par le terme u_{n-1}, c'est bien là une suite, la première du genre, et qui peut être prolongée autant que l'on veut ... jusque dans l'infini.

Plus tard, les suites furent formalisées par Cauchy, la maîtrise de cet outil a été grandement facilitée par l'adoption de la notation indicielle au XIX^e siècle qui consiste à noter chaque nombre d'une suite par une même lettre affectée d'un indice. On doit à Péano la définition d'une suite numérique telle qu'elle est enseigné en première S.

I) Notion de suites numériques

I-1 Définition

Travail de l'élève **1.** Repère, activité 4 p 101

Définition 1 :
Une **suite numérique** est une **liste infinie et ordonnée de nombres réels**.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Une suite u est en fait une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie à partir d'un certain entier p. A chaque entier $n \geq p$, la suite u associe un réel $u(n)$, que l'on note u_n.
u_n est appelé **terme d'indice** n ou **de rang** n de la suite.
u_p est le premier terme, ou le **terme initial** de la suite. On note $(u_n)_{n\geq p}$ ou (u_n) l'ensemble des termes de la suite.

Exemple :
Il arrive que l'on demande, lors de tests psychotechniques par exemple, de compléter "logiquement" une suite de nombres, comme par exemple :

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots$$

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots$$

$$-3, 1, 5, 9, \ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots$$

On pourrait alors décrire plus généralement ces suites de nombres ainsi : $u_n = 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n^2$ pour $n \geq 1$ et $w_{n+1} = w_n + 4$ avec $w_0 = -3$.

Exemple :
Déterminer le rang à partir duquel la suite (u_n) suivante est définie, puis calculer ces 3 premiers termes :

$$u_n = \sqrt{n-4}$$

Remarque :

Le 1^{er} terme de la suite u est souvent noté u_0 (ou u_1),
Le $2^{ème}$ terme de la suite u est souvent noté u_1 (ou u_2)
. . . .
. . . .
Le $n^{ème}$ terme de la suite u est souvent noté u_{n-1} (ou u_n)

Attention à ne pas confondre u_{n+1} qui est le terme d'indice $(n+1)$, donc le terme qui suit le terme d'indice n, à savoir u_n, avec $u_n + 1$, qui est la somme de u_n, ie du terme d'indice n, et de 1.
On a :

$$\underbrace{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}}_{\text{nom de la suite}} = \left(\underbrace{u_0}_{1^{er}\text{ terme}} ; \underbrace{u_1}_{2^{nd}\text{ terme}} ; u_2 ; \ldots ; \overbrace{u_{n-1} ; \underbrace{u_n}_{\text{terme de rang } n} ; u_{n+1}}^{\text{Trois termes consécutifs}} ; \ldots \right)$$

I-2 Modes de génération

On distingue principalement deux manières de définir les suites : de manière explicite ou par récurrence.

Définition 2 : *Formule explicite*

Soit $p \in \mathbb{N}$. Une suite $(u_n)_{n \geq p}$ est définie de manière explicite lorsqu'il existe une fonction f définie sur $[p; +\infty[$ telle que :

$$\forall n \geq p, \text{ on a } u_n = f(n)$$

Exemple :

On se donne $u_n = -2n + 1$ pour $n \geqslant 0$ (ici $u_n = f(n)$ avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 1$.)
On a ainsi $u_0 = -2 \times 0 + 1 = 1$, $u_1 = -2 \times 1 + 1 = -1$, $u_2 = -2 \times 2 + 1 = -3$, $u_3 = -6 + 1 = -5$, $u_4 = -8 + 1 = -7$, $\ldots$ $u_{100} = -199\ldots$, etc

Remarque : On peut alors calculer chaque terme de la suite par rapport à son indice.

Définition 3 : *Par récurrence*

Soit f une fonction définie sur un ensemble I telle que si $x \in I$ alors $f(x) \in I$.
Soit a un nombre réel de I et $p \in \mathbb{N}$.
On peut alors définir une suite u en posant : $\begin{cases} u_p = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \geq p \end{cases}$

Exemple :

On se donne $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -2u_n + 1 \end{cases}$ (ici $u_n = f(n)$ avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 1$.)
On a ainsi $u_1 = -2u_0 + 1 = -2 \times 1 + 1 = -1$, $u_2 = -2u_1 + 1 = -2 \times (-1) + 1 = 3$, $u_3 = -2u_2 + 1 = -2 \times 3 + 1 = -5$, etc

Remarques :
- En fait on se donne la valeur du premier terme et un procédé appelé **relation de récurrence** qui permet de calculer un terme à partir du précédent.
- On visualise ainsi facilement le lien logique entre les termes.
- Dans l'exemple précédent, pour calculer u_{100}, il faut connaître u_{99}, et pour calculer u_{99}, il faut connaître u_{98}, ainsi de suite . . . Il est alors préférable d'exprimer u_n en fonction de n pour calculer u_{100} directement.

Avec une calculatrice

Avec une TI :

Par défaut, la calculatrice est en mode fonction. Il faut passer en mode *suite* en appuyant sur **Mode** puis mettre `Suite` en surbrillance.
Pour entrer l'expression de la suite (u_n), on procède désormais comme pour une fonction : on appuie sur $\boxed{f(x)}$ ce qui nous permet d'entrer le premier indice, l'expression de la suite et éventuellement son premier terme.
Le n s'obtient avec la touche $\boxed{x,\, t,\, \theta,\, n}$ *et le u s'obtient en appuyant sur* **2nde** + $\boxed{7}$ *(on met l'indice entre parenthèses).*
On obtient le tableau de valeurs dans

Table = **2nde** + **Graphe**.

Avec une Casio :

On choisit le mode *suite* en sélectionnant le menu `Recur`.
On choisit ensuite le type de suite (explicite ou récurrente) grâce à la touche **F3 : `Type`** puis la touche **F1** (explicite) ou **F2** (récurrente).
On entre ensuite l'expression de la suite et on appuie sur **F5 : `SET`** pour paramétrer le tableau, notamment donner le premier indice et/ou premier terme si nécessaire.
Le n s'obtient avec la touche ***F1 :** n* *et le a_n s'obtient avec la touche* ***F2 :** a_n*
On peut alors afficher les valeurs de la table grâce à **F6 : `TABL`**

Exercice 1 **:**

Soit la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 2v_n + 3n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3.
2. Exprimer v_n, v_{n-1}, v_{2n} et v_{3n-1} en fonction du terme approprié de la suite (v_n).

Exercice 2 **:**

Soit la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-2)^n + 3$ et la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = -2v_n + 9 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Pour chacune des suites u et v :
   a. Déterminer les valeurs des trois premiers termes.
   b. Vérifier à la calculatrice les réponses de la question précédente.
2. Quelle conjecture peut-on émettre sur les suites u et v ? Démontrer cette conjecture.

Exercices du livre :

Repère : 41-42-44 p 124 (travail sur les indices)
Repère : 28-29-31-32-34 p 122 (Calculs de termes et algo)
TP info en AP : Symbole p 108 (Fibonacci)

II) Comportement d'une suite

II-1 Représentation graphique

II-1.1 Suites explicites

Définition 4 :

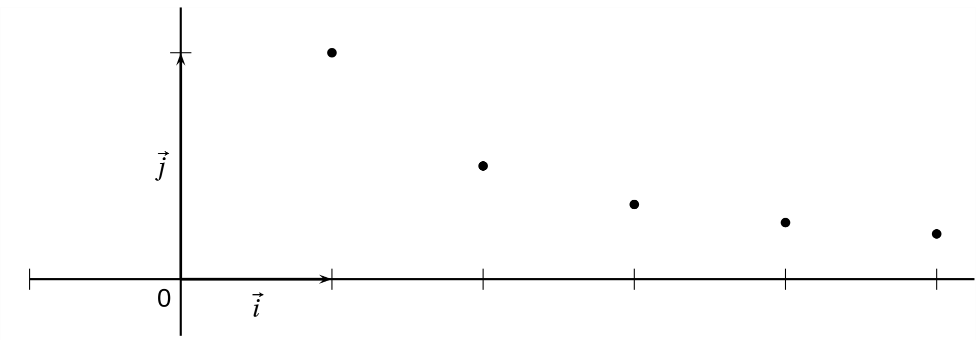
On se place dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. La représentation graphique d'une suite définie explicitement (u_n) est l'ensemble des points de coordonnées $(n;u_n)$

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie, pour $n \geq 1$, par

$$u_n = \frac{1}{n}$$

Sa représentation graphique est donc l'ensemble des points **isolés** de coordonnées $(1;1)$, $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $\left(3, \frac{1}{3}\right)$, $\left(4, \frac{1}{4}\right)$, $\left(5, \frac{1}{5}\right)$, etc...

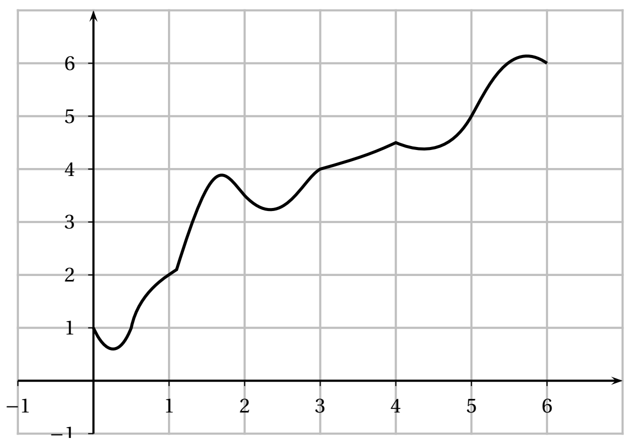


Exercice 3 **:**

Soit f la fonction définie par sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ ci-contre et la suite u de terme général $u_n = f(n)$.

1. Lire une valeur approchée des termes de u_0 à u_5.

2. Que peut-on dire du comportement des premiers termes de u ?



Exercices du livre :

Repère : n° 35-36 p 123 (tracé)

II-1.2 Suites récurrentes

Travail de l'élève **2.** On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \geq 0$ on a $u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{u_n}$.

Partie A : Tracer les premiers termes sur l'axe des abscisses

1. Tracer soigneusement la courbe $\mathscr{C}$ représentant f et la droite Δ d'équation $y = x$ sur $[0;3]$ dans un repère orthonormé avec pour unité 5 cm.

2. **a.** Placer u_0 sur l'axe des abscisses. Placer $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.

b. Placer le point A_1 de Δ d'ordonnée u_1. Quelle est son abscisse ?
Placer alors u_1 sur l'axe des abscisses.

c. Sachant que $u_2 = f(u_1)$, expliquer comment construire u_2 sur l'axe des abscisses. Le construire.

3. Construire ainsi, pas à pas, sur l'axe des abscisses, les premiers termes de la suite jusqu'à u_5.

4. Comment se poursuivrait le tracé si on pouvait agrandir le graphique ?
   Emettre des conjectures sur le comportement de la suite (u_n).

Partie B : Influence du premier terme

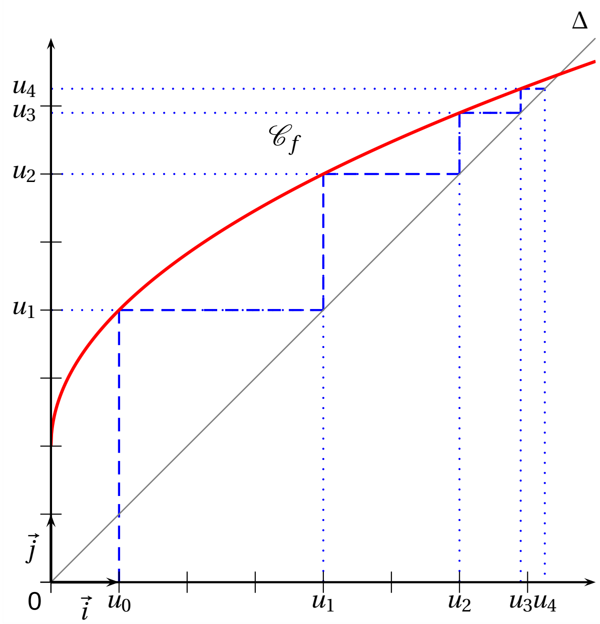
1. Sur votre calculatrice, afficher de même les premiers termes de la suite (v_n) définie par $v_0 = 0.1$ et pour tout n, $v_{n+1} = f(v_n)$.
   Dans **Fenêtre** *, choisir X et Y entre 0 et 1.*
2. Emettre des conjectures sur le comportement de la suite (v_n).

Dans le cas d'une suite récurrente, on ne cherche pas en général à représenter graphiquement la suite comme pour les suites explicites (mais on pourrait très bien le faire).
On préfère représenter ses premiers termes sur l'axe des abscisses en s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction définissant la relation de récurrence.
On obtient alors un diagramme « en escalier » ou en « en escargot ».

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 2$ et $u_0 = 1$
On considère la fonction f vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ définie par $f : x \longmapsto 2\sqrt{x} + 2$.

1. On trace la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f
2. On place u_0 sur l'axe des abscisses et u_1, image de u_0 par f, sur l'axe des ordonnées
3. Comme u_2 est l'image de u_1 par f, on veut avoir u_1 sur l'axe des abscisses.
   Pour cela, on utilise la droite Δ d'équation $y = x$, que l'on prendra soin de tracer.
4. On reporte alors u_1 sur l'axe des abscisses, à l'aide de Δ
5. On place u_2 image de u_1 par f, puis on reporte u_2 sur l'axe des abscisses, etc.



Remarque : Dans l'exemple précédent, on constate que les termes de la suite semblent augmenter et se rapprocher d'une valeur « limite » : celle de l'abscisse du point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et de Δ.
On dira que la suite est croissante et qu'elle *converge* vers cette valeur l, appelée limite de la suite (u_n).
Pour la trouver, on résout l'équation $f(l) = l$:

$$f(l) = l \iff 2\sqrt{l} + 2 = l \iff 2\sqrt{l} = l - 2 \iff 4l = l^2 - 4l + 4 \quad \text{et} \quad \begin{cases} l > 0 \\ l - 2 > 0 \end{cases} \iff l^2 - 8l + 4 = 0 \quad \text{et} \quad l > 2$$

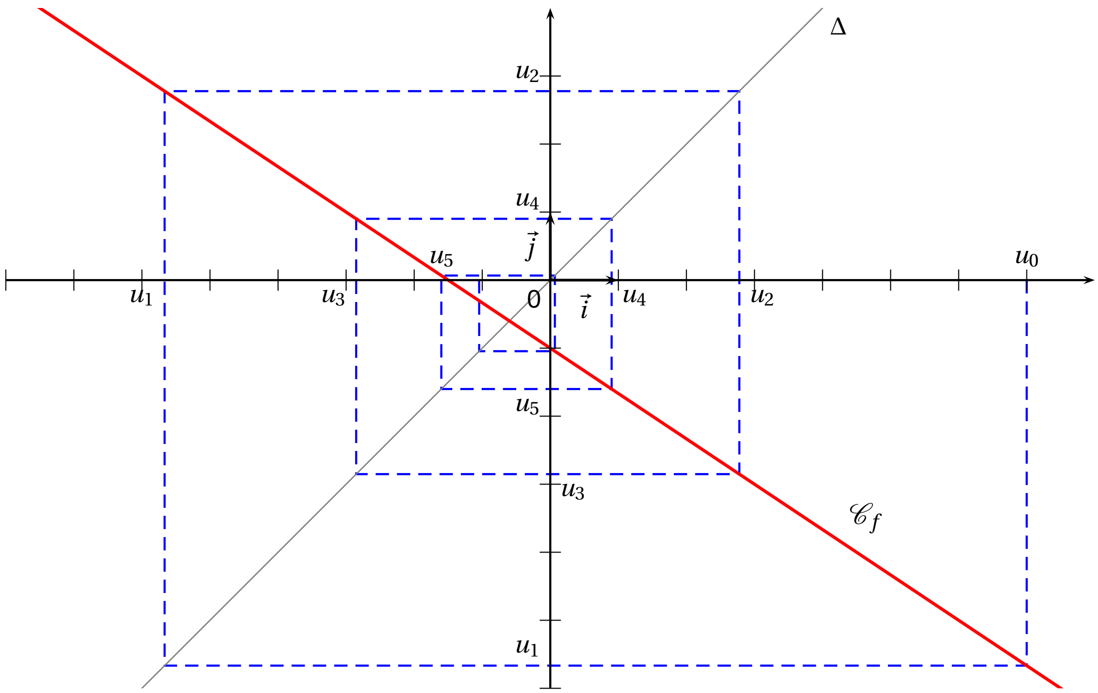
$\Delta = 64 - 4 \times 1 \times 4 = 48$. Donc $l_1 = \dfrac{8 + 4\sqrt{3}}{2} = 4 + 2\sqrt{3}$ et $l_2 = 4 - 2\sqrt{3} < 2$. Donc $l = 4 + 2\sqrt{3}$.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4 + 2\sqrt{3}$

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par $u_{n+1} = -\dfrac{2}{3}u_n - 1$ et $u_0 = 7$

On considère la fonction f vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ définie par $f : x \longmapsto -\dfrac{2}{3}x - 1$.

On a représenté ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f et la droite Δ d'équation $y = x$, puis on a suivi les mêmes étapes que pour l'exemple précédent.



Remarque : Contrairement à l'exemple précédent, les éléments de la suite ne semblent pas faire qu'augmenter ou diminuer. Cette suite n'est ni croissante, ni décroissante. Mais cette suite semblent également convergente vers l'abscisse l du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

Pour trouver l, on résout $f(l) = l \iff -\dfrac{2}{3}l - 1 = l \iff \dfrac{5}{3}l = -1 \iff l = -\dfrac{3}{5}$.

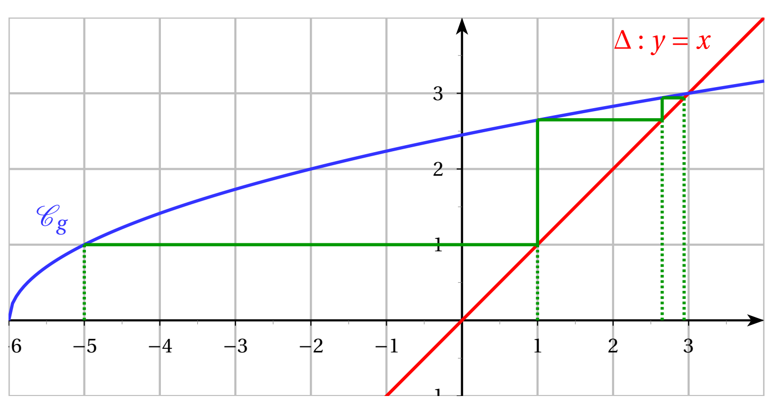
Exercice 4 **:**

On a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction g et la droite $\Delta : y = x$.

On a représenté les quatre premiers termes de la suite t définie par son terme initial t_0 et la relation

$$t_{n+1} = g(t_n) \qquad \text{pour tout entier } n \geq 0$$

Donner le terme initial t_0 et lire des valeurs approchées de t_1, t_2 et t_3.



Avec une calculatrice

Avec une TI :

Se mettre en Mode `Suite`.

- **Pour une suite explicite** :
  - Mettre en surbrillance le Mode `NonRelié` afin que les points ne soient pas reliés entre eux.
  - Rentrer la suite dans $\boxed{f(x)}$ en précisant l'indice de départ.
  - Dans **Format** : 2nde + Zoom mettre en surbrillance `f(n)`.

- **Pour une suite récurrente** :
  - Mettre en surbrillance le *Mode* `Relié`.
  - Rentrer la suite dans $\boxed{f(x)}$ en précisant l'indice de départ, `u(n)` en fonction des termes précédents appropriés et le premier terme.
  - Aller dans **Format** : 2nde + Zoom et mettre en surbrillance `Esc` (en escalier).

Ensuite, appuyer sur **Graphe**, puis **Trace** et les flèches $\boxed{\triangleright}$ et $\boxed{\triangleleft}$ pour voir les termes de la suite.

Afin d'ajuster la fenêtre automatiquement, appuyer sur **Zoom** et choisir `ZMinMax`.

Avec une Casio :

Se mettre en *Mode suite*.

Enregistrer la suite dans le bon *Type*.

Appuyer ensuite sur la touche **F4 :** `WEB` ou encore **F6 :** `TABL` + **F6 :** `G-PLT`.

Afin d'ajuster la fenêtre automatiquement, appuyer sur **F2 :** `Zoom` et choisir `AUTO`.

Exercice 5 :

1. Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 6} \end{cases}$

   Afficher sur votre calculatrice une représentation graphique de la suite u.

2. Même question pour la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \sqrt{2n+6}$.

Exercices du livre :

Repère : n° 37-38-39 p 123 (tracé + reconnaissance)

II-2 Sens de variation

Travail de l'élève **3.** Soient les suites (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 2n+3 \qquad v_n = 5\times 0.8^n \qquad w_n = 5\times(-0.8)^n \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} t_0 = 4 \\ t_{n+1} = t_n - 3 \end{cases}$$

Comparer pour tout $n \in \mathbb{N}$ les termes suivants :

1. u_{n+1} et u_n. **2.** v_{n+1} et v_n. **3.** w_{n+1} et w_n. **4.** t_{n+1} et t_n.

Définition 5 :

Soit (u_n) une suite de nombre réels. On dit que la suite (u_n) est
- **croissante** (à partir du rang p) si et seulement $u_n \leq u_{n+1}$, $\forall n \geq p$.
- **décroissante** (à partir du rang p) si et seulement $u_n \geq u_{n+1}$, $\forall n \geq p$.
- **monotone** (à partir du rang p) si et seulement elle est croissante ou décroissante (à partir du rang p)
- **stationnaire** (à partir du rang p) si et seulement si $u_n = u_{n+1}$ pour tout entier $n \geq p$ (si la suite est définie à partir du rang p alors on dit que la suite est **constante**)

Remarque : On définit la stricte croissance ou décroissance à l'aide des inégalités strictes suivantes :

$$u_n < u_{n+1} \text{ ou } u_n > u_{n+1}$$

Méthodes pour étudier les variations d'une suite

- On étudie généralement le signe de $u_{n+1} - u_n$ selon les valeurs de n.
- Si tous les termes de la suite u sont **strictement positifs**, on peut comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.
  Ceci se révèle souvent pratique dans le cas où il y a des exposants n dans l'expression de la suite.

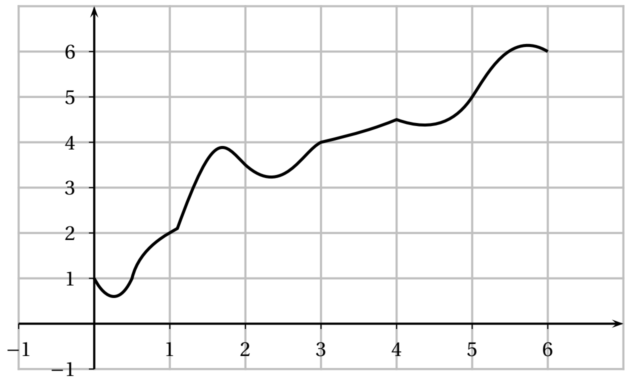
Exemples :

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = n^2 + 2$, alors on a
$$u_{n+1} = (n+1)^2 + 2 = n^2 + 2n + 3$$
Ainsi pour tout n on a $u_{n+1} - u_n = 2n + 1 > 0$ pour tout $n > 0$.
Donc $u_{n+1} > u_n$ pour tout n : la suite est donc strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = 2 \times 5^n$.
On a $v_n > 0$ pour tout entier naturel n et
$$v_{n+1} = 2 \times 5^{n+1}$$
Ainsi pour tout n on a
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5 > 1$$
Donc $v_{n+1} > v_n$ pour tout n : la suite est donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$
3. Etudier de deux manières différentes le sens de variation de la suite $(w_n)_{n\geq 3}$ définie par
$$w_n = \frac{3n-1}{n+2}$$

Théorème 1 :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq p}$ définie **explicitement** par $u_n = f(n)$, avec f définie sur l'intervalle $[p;+\infty[$.
Si la fonction f est monotone (resp. strictement monotone) sur $[p;+\infty[$ alors la suite (u_n) est monotone (resp. strictement monotone) et possède le même sens de variation que la fonction f

Remarques :
- On a déjà vu que ce théorème était faux pour les suites définies par récurrence.
- La réciproque de ce théorème est fausse i.e que l'on peut trouver une suite croissante, par exemple, définie par une fonction non croissante, comme sur le dessin ci-dessous :



Preuve

On a $p \leq n < n+1$ donc si f est strictement croissante sur $[p;+\infty[$, on a par définition :

$$f(n) < f(n+1) \Longleftrightarrow u_n < u_{n+1}$$

Par conséquent, (u_n) est strictement croissante.
De la même manière, si f est strictement décroissante sur $[p;+\infty[$, on a

$$f(n) > f(n+1) \Longleftrightarrow u_n > u_{n+1}$$

Par conséquent, (u_n) est strictement décroissante.

Exemples :

Etudier avec cette troisième méthode le sens de variation des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\geq 3}$ définies dans l'exemple précédent.

- Soit $f : x \longmapsto x^2+2$; définie sur $[0;+\infty[$.
  f est une fonction trinôme et sait qu'elle est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
  Donc (u_n) est aussi strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
- Soit $g : x \longmapsto \dfrac{3x-1}{x+2}$; définie sur $[3;+\infty[$.
  On a $g(x) = \dfrac{3x}{x+2} - \dfrac{1}{x+2} = 3\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{x}} + \left(-\dfrac{1}{x+2}\right)$.
  Or on a

x	3 $+\infty$
Variations de $1+\dfrac{2}{x}$	↘
Variations de $\dfrac{1}{1+\frac{2}{x}}$	↗
Variations de $3\dfrac{1}{1+\frac{2}{x}}$	↗

et

x	3 $+\infty$
Variations de $x+2$	↗
Variations de $\dfrac{1}{x+2}$	↘
Variations de $-\dfrac{1}{x+2}$	↗

Or la somme de fonctions croissantes est croissante. Donc g est croissante sur $[3;+\infty[$. On en conclut que $(w_n)_{n\geq 3}$ est aussi strictement croissante pour $n \geq 3$.

II-3 Notion de convergence

Travail de l'élève **4.** Soient les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{1}{n} \qquad v_n = n^2 - 3 \qquad w_n = (-1)^n$$

1. Etudier le sens de variation de chacune de ces suites.

2. Conjecturer graphiquement le « comportement à l'infini » de ces suites.

3. **a.** Déterminer un entier p tel que pour tout entier $n \geq p$, on ait $0 \leq u_n \leq 10^{-6}$.

b. Peut-on faire de même en remplaçant 10^{-6} par n'importe quel réel $\varepsilon > 0$?

4. **a.** Déterminer un entier p' tel que pour tout entier $n \geq p'$, on ait $v_n \geq 10^{10}$.

b. Peut-on faire de même en remplaçant 10^{10} par n'importe quel réel M ?

Définition 6 :

On dit qu'une suite **admet une limite réelle** ℓ (ou **converge vers le réel** ℓ) lorsque tous les termes de la suite (u_n) sont aussi proches de ℓ que l'on veut à partir d'un certain rang.

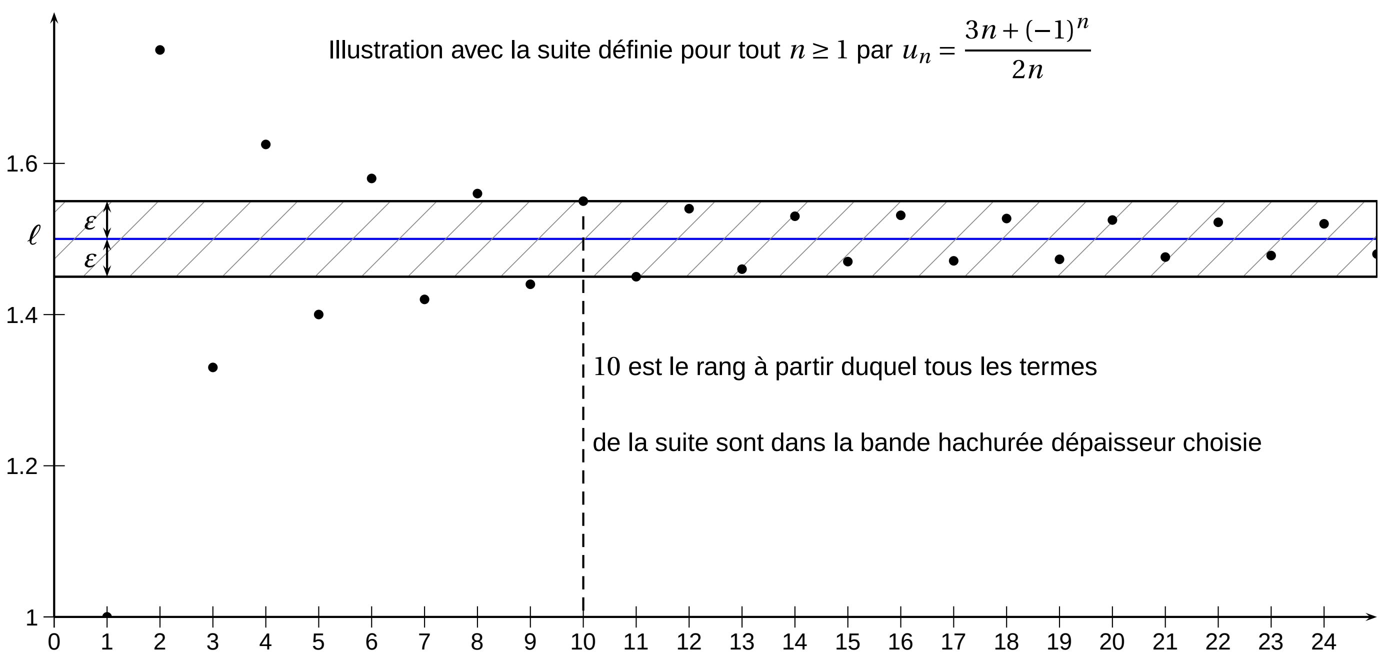
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad \text{on a } |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Remarque : Autrement dit, quelque soit le nombre ε choisi (aussi petit que l'on veut), il existe un rang N (dépendant de ε) à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont contenus dans l'intervalle $]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[$).

Exemple :

Graphiquement, cela se traduit ainsi :



– Le graphique permet de conjecturer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \frac{3}{2}$

– Ici on a choisi $\varepsilon = 0.05$ et on a trouvé que pour $N = 10$, tous les termes de la suite (u_n) étaient dans l'intervalle $]1.45; 1.55[$ pour $n \geq 10$.
– Si on avait choisi $\varepsilon = 0.1$, on aurait trouvé que pour $N = 5$, tous les termes de la suite (u_n) étaient dans l'intervalle $]1.4; 1.6[$ pour $n \geq 5$.
– Si on avait choisi $\varepsilon = 0.04$, on aurait trouvé que pour $N = 13$, tous les termes de la suite (u_n) étaient dans l'intervalle $]1.46; 1.54[$ pour $n \geq 13$.

Définition 7 :
On dit qu'une suite est **divergente** si elle n'est pas convergente.
C'est le cas des suites qui n'admettent pas de limite, et des suites qui sont aussi grandes que l'on veut, dans les positifs ou négatifs, à partir d'un certain rang.
Dans ce dernier cas, on dit que la suite diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemples :
Conjecturer graphiquement les limites éventuelles des suites (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 4n^2 + 5n - 1 \qquad v_n = -\frac{1}{n+2} + 1 \qquad w_n = -2n^2 + 2 \qquad \text{et} \qquad t_n = \cos(n) + 1$$

Exercices du livre : Repère
n° 118-119 p 133 + 121 à 127 p 135
DM sur la suite de Fibonacci : TP livre Symbole p 108 + théorie livre repère n°133 p 136

III) Suites arithmétiques

III-1 Généralités

Travail de l'élève **5.** Repère 3 p 101

Définition 8 :
Une suite (u_n) est dite **arithmétique** lorsque l'on ajoute **toujours** le même nombre r pour passer d'un terme au suivant :

$$u_{n+1} = u_n + r \qquad \forall n$$

Ce nombre r s'appelle la **raison** de la suite (u_n).

Exemple :
La suite des entiers naturels pairs est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2

Méthode pour reconnaître une suite arithmétique
Pour qu'une suite u soit arithmétique, il faut et il suffit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la diffèrence $u_{n+1} - u_n$ soit constante :

$$u_{n+1} - u_n = r \in \mathbb{R}$$

Le nombre r est la raison de la suite u.

Exemple :

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ?

1. $u_n = 3n - 2$ **2.** $v_n = n^2 - 3$ **3.** $w_n = -4n + 1$

Remarques :

– En fait, toute suite (u_n) définie par $u_n = an + b$ où a et b sont deux réels est une suite arithmétique de raison a et de premier terme $u_0 = b$. En effet, on a alors :

$$u_{n+1} - u_n = a(n+1) + b - (an+b) = a$$

De plus $u_0 = a \times 0 + b = b$.
C'est effectivement ce que nous avons pu constater sur les suite (u_n) et (w_n) précédemment.

– Le sens de variation et la limite d'une suite arithmétique (u_n) dépend uniquement du signe de sa raison r.
  - Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$;
  - Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante ;
  - Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple :

La suite (u_n) définie par $u_n = -\sqrt{2}n + 54$ est une suite arithmétique de raison $-\sqrt{2}$ et de terme initial $u_0 = 54$.
Elle est donc décroissante et et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exercices du livre :

n° 53 p 124

III-2 Formules explicites

La définition par récurrence d'une suite arithmétique, rend fastidieux le calcul des termes de grand indice. Il est donc intéressant d'avoir une formule donnant explicitement u_n en fonction de n.

Théorème 2 :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n = u_0 + nr$$

Preuve

(u_n) étant une suite arithmétique, on a $u_1 = u_0 + r$, puis $u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r$, et ainsi de proche en proche on a :

$$u_0 \xmapsto{+r} u_1 \xmapsto{+r} u_2 \xmapsto{+r} u_3 \xmapsto{+r} \ldots \xmapsto{+r} u_n$$

On a ajouté n fois le nombre r pour obtenir u_n en partant de u_0.
Donc $u_n = u_0 + nr$.

Exemple :

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2. Calculer u_{2010}.

Théorème 3 :
Soit (u_n) une suite arithmétique et de raison r, alors pour tous p et n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Preuve

$$u_p \xmapsto{+r} u_{p+1} \xmapsto{+r} u_{p+2} \xmapsto{+r} u_{p+3} \xmapsto{+r} \dots \xmapsto{+r} u_{p+k}$$

On a ajouté k fois le nombre r pour obtenir u_{p+k} en partant de u_p.
Donc pour $n = p+k$, on ajoute $k = n-p$ fois le nombre r pour obtenir u_n à partir de u_p.
D'où $u_n = u_p + (n-p)r$.

Exemple :

Considérons une suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_{27} = 6$ et $v_{39} = 10$.

1. Retrouver la raison r de cette suite puis son terme initial.
2. Calculer alors v_7 et v_{74}.

Exercices du livre :

n° 55 p 124 (calculs simples)
n° 60 et 63 p 125 (suites composées)

III-3 Sommes de termes consécutifs

Théorème 4 : ***Somme des n premiers entiers***

$$1+2+\cdots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve

Notons $S = 1+2+\cdots+n-1+n$. On a

$$\begin{array}{lccccccccccccccc} & S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ \text{et} & S & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

En ajoutant membre à membre les deux égalités, on a :

$$\begin{aligned} 2S &= (1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\cdots+(n-2+3)+(n-1+2)+(n+1) \\ &= \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)+(n+1)}_{n \text{ fois}} \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

Donc $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Exemple :
La somme des 100 premiers entiers est donc :

$$\frac{100\times 101}{2}=\frac{10100}{2}=5050$$

Théorème 5 :
On considère une suite arithmétique (u_n). On a :

$$\text{Somme de termes consécutifs} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

En particulier :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k=(n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$$

Attention !
Soit p et q deux nombres entiers naturels tels que $p<q$.
La somme $u_p+u_{p+1}+\cdots+u_q$ comporte donc $q-p+1$ termes.

Preuve
Dans le cas particulier (le cas général se traite de la même façon en utilisant la remarque précédente). On a :

$$\begin{array}{rcccccccccccc} S & = & u_0 & + & \underbrace{u_1}_{u_0+r} & + & \underbrace{u_2}_{u_0+2r} & + & \ldots & + & \underbrace{u_{n-1}}_{u_0+(n-1)r} & + & \underbrace{u_n}_{u_0+nr} \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} S &= (n+1)u_0+(1+2+3+\cdots+n)r \\ &= (n+1)u_0+\frac{n(n+1)}{2}\times r \\ &= (n+1)\times\left(u_0+\frac{n}{2}r\right)=(n+1)\left(\frac{2u_0+nr}{2}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{u_0+(u_0+nr)}{2}\right)=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right) \end{aligned}$$

Exemple :

1. Calculer la somme des 50 premiers entiers impairs.
2. Calculer la somme des 50 premiers entiers pairs en partant de 12.

Exercices du livre :
n° 54-56 p 124 (calculs simples) + 95 p 130 (somme)
Exo challenge : 58 p 125

IV) Suites Géométriques

IV-1 Généralités

Définition 9 :
Une suite (u_n) est dite **géométrique** lorsque l'on multiplie **toujours** par le même nombre q pour passer d'un terme au suivant :

$$u_{n+1} = q \times u_n \qquad \forall n$$

Ce nombre q s'appelle la **raison** de la suite (u_n).

Exemple :
La suite des puissances de 2 est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

Méthode pour reconnaître une suite géométrique
Pour qu'une suite u soit géométrique, il faut et il suffit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les termes u_n soient non nuls et que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ soit constant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \in \mathbb{R}^*$$

Le nombre q est la raison de la suite u.

Exemple :
Les suites (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) définies ci-dessous sur $\mathbb{N}$ sont-elles géométriques ?

1. $u_n = \frac{2}{3^n}$ **2.** $v_n = 2 \times (-1)^n$ **3.** $\begin{cases} w_0 = 6 \\ w_{n+1} = 3v_n + 4 \end{cases}$ **4.** $t_n = w_n + 2$

Remarques :

– En fait, toute suite (u_n) définie par $u_n = aq^n$ où a et q sont deux réels non nuls est une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 = a$. En effet, on a alors :

$$u_{n+1} = aq^{n+1} = aq^n \times q = u_n \times q$$

Par conséquent la suite est géométrique de raison q. De plus $u_0 = a \times q^0 = a \times 1 = a$.
C'est effectivement ce que nous avons pu constater sur les suites précédentes.

– Le sens de variation et la limite d'une suite géométrique (u_n) dépend uniquement de la valeur de sa raison q.
  - Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est strictement croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$;
  - Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$;
  - Si $-1 < q < 0$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$;
  - Si $q < -1$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone et n'a pas de limite.

Exemple :
La suite (u_n) définie par $u_n = (-0.8)^n \times 7$ est géométrique de raison $q = -0.8$ et de premier terme $u_0 = 7$. Elle n'est pas monotone et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exercices du livre : Repère
n° 71-74-76 p 126 + 109 p 131 (arith + géom)

IV-2 Formules explicites

Théorème 6 :
Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme u_0 alors

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Preuve
(u_n) étant une suite arithmétique, on a $u_1 = u_0 \times q$, puis $u_2 = u_1 \times q = u_0 \times q^2$, et ainsi de proche en proche on a :

$$u_0 \xmapsto{\times q} u_1 \xmapsto{\times q} u_2 \xmapsto{\times q} u_3 \xmapsto{\times q} \ldots \xmapsto{\times q} u_n$$

On a multiplié n fois par le nombre q pour obtenir u_n en partant de u_0.
Donc $u_n = u_0 \times q^n$.

Exemple :
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3. On a alors :

$$u_n = 2 \times 3^n$$

On peut, par exemple calculer directement $u_5 = 2 \times 3^5 = 2 \times 243 = 486$

Théorème 7 :
(u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 0$ alors quels que soient les entiers naturels n et p on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Preuve

$$u_p \xmapsto{\times q} u_{p+1} \xmapsto{\times q} u_{p+2} \xmapsto{\times q} u_{p+3} \xmapsto{\times q} \ldots \xmapsto{\times q} u_{p+k}$$

On a multiplié k fois par le nombre q pour obtenir u_{p+k} en partant de u_p.
Donc pour $n = p + k$, on multiplie $k = n - p$ fois par le nombre q pour obtenir u_n à partir de u_p.
D'où $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exemple :
(u_n) et (v_n) sont deux suites géométriques. Déterminer u_5, u_8, v_7 et v_{15} sachant que :

1. $u_0 = 6$ et $q = -\dfrac{1}{3}$
2. $v_5 = 1$ et $v_{10} = 32$

Exercices du livre : Repère
n° 75-84 p 127 (calculs simples) n° 80 p 128 (suites composées)

IV-3 Sommes de termes

Théorème 8 : *Cas particulier $u_n = q^n$, avec $q \neq 1$*

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Preuve

Notons $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n$.
On a alors $qS = q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^n + q^{n+1}$.
Par conséquent :

$$\begin{aligned} S - qS &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n - \left(q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^n + q^{n+1}\right) \\ \iff (1-q)S &= 1 - q^{n+1} \\ \iff S &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

Exemple :
La somme des 10 première puissance de 2 est donc :

$$\sum_{k=0}^{9} 2^k = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^9 = \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 1023$$

Théorème 9 :
On considère une suite géométrique (u_n) de raison $q \neq 1$.
On a :

$$\text{Somme de termes consécutifs} = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

En particulier :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Preuve

Dans le cas particulier (le cas général se traite de la même façon). On a

$$\begin{aligned} S &= u_0 + \underbrace{u_1}_{u_0 \times q} + \underbrace{u_2}_{u_0 \times q^2} + \ldots + \underbrace{u_{n-1}}_{u_0 \times q^{n-1}} + \underbrace{u_n}_{u_0 \times q^n} \end{aligned}$$

$$S = u_0\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n\right) = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque : Le cas $q = 1$ est trivial :

$$u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \cdots + u_0 \times q^n = \underbrace{u_0 + u_0 + \cdots + u_0}_{(n+1) \text{ fois}} = u_0 \times (n+1)$$

Exemple :

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et de raison $q = \frac{3}{2}$.
Calculer $S = u_4 + u_5 + \cdots + u_{14}$

Exercices du livre : Repère

A trouver ! !

« La vie est faite de hasard contraire au destinée. »

JOHAN SFAR, Issu du film « Gainsbourg, vie héroïque »