Chapitre 5

Trigonométrie

Hors Sujet

Titre : « Death Note »

Auteur : Oba et Obata

Présentation succinte de l'auteur : *Death Note* est un manga de type shônen, créé par le scénariste Tsugumi Oba et le dessinateur Takeshi Obata. Il a été prépublié dans un journal de 2003 à 2006, et par la suite publiée en douze tankôbon de 2004 à 2006.

L'histoire est centrée sur *Raito Yagami*, un lycéen surdoué qui juge le monde actuel criminel et corrompu. Sa vie change du tout au tout le jour où il ramasse par hasard un mystérieux cahier intitulé « Death Note ». Ancienne propriété d'un dieu de la mort, le Death Note permet à son utilisateur de tuer toute personne dont il connaît le nom et le visage. Raito décide d'utiliser le Death Note pour exterminer les criminels, dans le but d'éradiquer le Mal et de bâtir un monde parfait dont il sera le dieu.

Mais les nombreuses morts inexpliquées de criminels à travers le monde attirent l'attention d'Interpol et du mystérieux *L*, un détective capable de résoudre n'importe quelle énigme, mais dont personne ne connaît ni le visage ni le nom. L décide d'enquêter pour capturer le tueur en série, surnommé par le grand public « Kira ». Entre Raito et L, tous deux persuadés d'agir pour la justice, s'engage un combat acharné pour découvrir en premier l'identité de l'autre...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée !* »
JOHN LOUIS VON NEUMANN

Leçon 5

Trigonométrie

Au fil du temps

Odyssé p 216

I) Le cercle trigonométrique

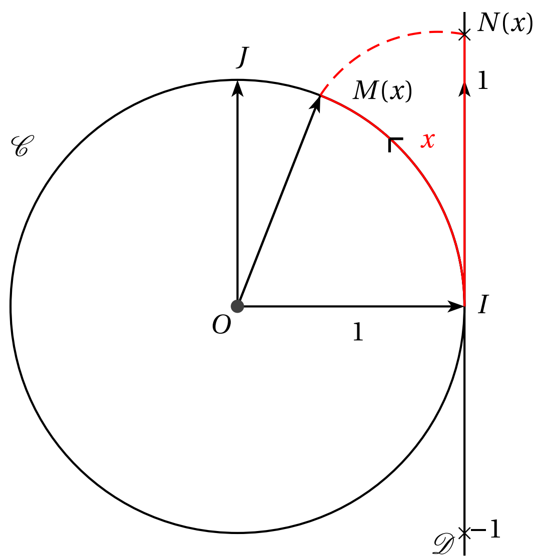
I-1 Enroulement de la droite des réels et notations

Travail de l'élève **1.** Cf AP trigonométrie (rappels cercle trigonométrique, radians, mesure principale, configuration du rectangle, construction sur Géogébra des courbes sinus et cosinus, tableau de variations ...)
Cf DM 3 (conversion d'angles, mesures principales, configuration du rectangle ...)

Une unité de longueur est choisie dans le plan.
Pour tout le chapitre, $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O et d'origine I (donc de rayon 1, et orienté positivement), J désigne le point du cercle tel que $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ est un repère orthonormé (direct, comme sur la figure ci-dessous).

Soit $\mathscr{D}$ la tangente à $\mathscr{C}$ en I, muni du repère $(I;\overrightarrow{OJ})$.

Alors, tout point N de la droite $\mathscr{D}$ est repérée par son abscisse $x \in \mathbb{R}$.
Selon l'algorithme d'« enroulement de la droite des réels », décrit en classe de seconde, on associe à tout point N (donc à tout réel x) un unique point $M(x)$ du cercle $\mathscr{C}$, tel que la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ vaut x.



Propriété 1 :
Pour tout réel x et tout entier relatif k, les points $M(x)$ et $M(x+2k\pi)$ sont confondus sur $\mathscr{C}$.

Preuve
Le périmètre du cercle $\mathscr{C}$ vaut $2\pi R = 2\pi$.

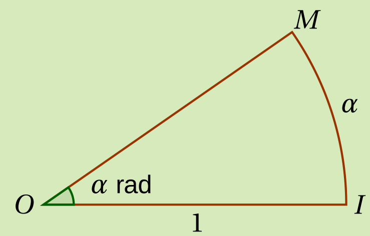
Remarque : On peut désormais décrire la position d'un point M sur le cercle en donnant l'un des réels qui lui sont associés, cependant ce n'est pas la manière la plus simple ...

I-2 Le radian

Définition 1 :

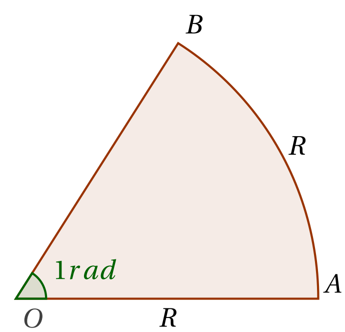
Soit A le point de $\mathscr{C}$ associé au réel 1. On définit le radian (symbole rad) comme la mesure de l'angle $\widehat{IOA}$ ainsi construit.

Ainsi, la mesure d'un angle $\widehat{IOM}$ en radians est la longueur de son arc associé $\widehat{IM}$.



Remarques :

– Au collège, le degré comme unité d'angle convenait parfaitement, même pour la trigonométrie (dans un triangle rectangle). Mais pour mettre en oeuvre des notions qui seront abordées dans les classes ultérieures, il est plus pratique d'utiliser désormais le radian.
– Cette définition ne dépend pas de l'unité de longueur choisie. En fait, dans un cercle de rayon R, 1 radian est la mesure d'un angle qui intercepte un arc de longueur égale au rayon R.



Propriété 2 :

Les mesures d'angles en degrés et en radians sont proportionnelles.

Preuve

Les longueurs d'arc sont proportionnelles aux angles en degrés.

Exemples :

Le périmètre de $\mathscr{C}$ valant 2π, on en déduit facilement qu'un angle plat mesure π radians ; un angle droit $\frac{\pi}{2}$ rad.
Avec le tableau de proportionnalité suivant, on trouve convertit n'importe quelle mesure.

Mesure en degrés	180	d
Mesure en radians	π	α

Ainsi pour convertir 60° en radian on calcule $\alpha = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ rad.

Pour convertir $\frac{5\pi}{6}$ rad en degré, on calcule $d = \frac{\frac{5\pi}{6} \times 180}{\pi} = \frac{5 \times 180}{6} = 5 \times 30 = 150°$

Remarque : On pourrait désormais décrire la position d'un point M sur le cercle en donnant la valeur de l'angle $\widehat{IOM}$, cependant, sans précision supplémentaire, nous aurions le choix entre deux points M ...
Il devient donc important de préciser un « sens » pour les angles et une nouvelle désignation, afin de savoir que l'on tient compte de l'orientation.

Exercices du livre :

n° 40-54 p 288 (conversions et placer des points)

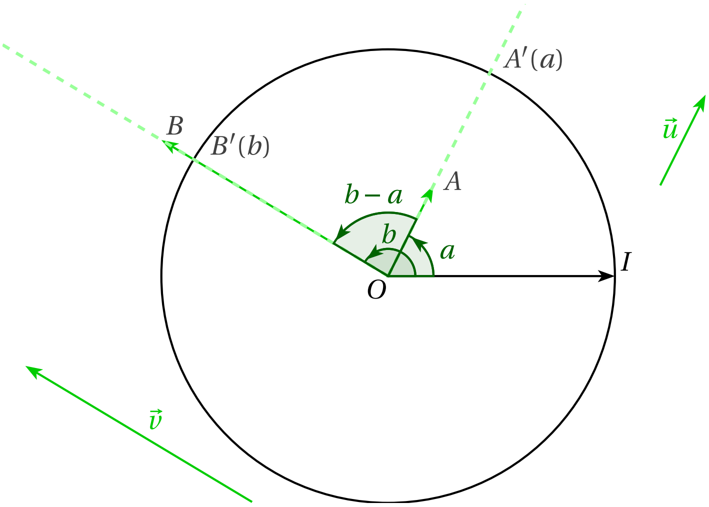
II) Angles orientés de vecteurs

II-1 Définition

On conserve les notations précédentes. De plus, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs non nuls.

Définition 2 :

Le couple $(\vec{u};\vec{v})$ est appelé **angle orienté de vecteurs** en radians.
Soient A et B deux points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.
On note A' et B' les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec respectivement les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$.
Si A' est associé au réel a et B' est associé au réel b, alors on appelle **mesure de l'angle orienté** $(\vec{u};\vec{v})$ le réel $b-a$.



Remarques :

– On a évidemment :

$$(\vec{u};\vec{v})=(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'})=(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB'})\dots$$

– Les mesures de $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ sont en fait les mesures en radians de l'angle orienté $\widehat{AOB}$, mais cette nouvelle définition nous permet de savoir que l'unité est le radian, et que l'on tient compte de l'orientation du plan, sans le préciser à chaque fois. De plus, elle va s'avérer très pratique pour les manipulations algébriques.

Exemple :

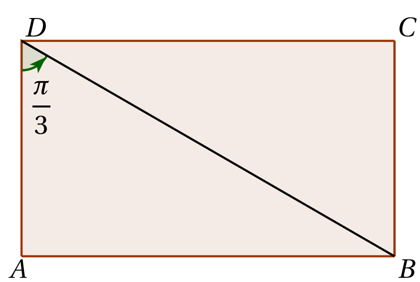
On a la figure suivante, où $ABCD$ est un rectangle direct.

Angles géométriques

$$\widehat{ADB}=\widehat{BDA}=\frac{\pi}{3}$$

$$\widehat{ADc}=\widehat{CDA}=\frac{\pi}{2}$$

$$\widehat{BDC}=\widehat{CDB}=\frac{\pi}{6}$$



Angles orientés

$(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA})=-\frac{\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})=\frac{\pi}{3}$

$(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})=-\frac{\pi}{2}$ et $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})=\frac{\pi}{2}$

$(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})=\frac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB})=-\frac{\pi}{6}$

Donner des mesures des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$; $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})$; $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CD})$

Exemple :

ABC est un triangle équilatérale direct.
Lire graphiquement une mesure de chacun des angles ci-dessous :

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ $\quad(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})$ $\quad(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB})$ $\quad(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC})$

Propriété 3 : *Définition*
Un angle $(\vec{u};\vec{v})$ possède une infinité de mesures mais une unique dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$, appelée **mesure principale**.

Preuve
Avec les notations précédentes, comme A' et B' sont associés à une infinité de réels, donc il existe une infinité de mesures de l'angle $(\vec{u};\vec{v})$.
Si α est l'une d'elle, alors $\alpha+2k\pi$ en est une aussi, pour tout $k\in\mathbb{Z}$.
De plus, deux mesures en radians d'un même angle sont au moins distantes de 2π, puisque le périmètre de $\mathscr{C}$ vaut 2π. Donc il existe une unique mesure de $(\vec{u};\vec{v})$ dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$ (d'(amplitude 2π).

Remarques :

- Si A et B sont deux points du cercle $\mathscr{C}$, la mesure principale de $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ correspond à la longueur du plus petit arc orienté allant de A vers B sur le cercle $\mathscr{C}$.
- Si α est la mesure principale d'un angle $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$, alors ses autres mesures sont les réels $\alpha+k\times 2\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.
  On note $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\alpha \quad [2\pi]$, (se lit « égal α modulo 2π »).
  De plus, la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ est égale à $|\alpha|$.
- Pour trouver la mesure principale d'un angle, il faut retrancher ou ajouter un multiple suffisant de 2π.

Exemples :

Trouver les mesures principales de $\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{19\pi}{5}$ et $\frac{51\pi}{6}$.

$$\pi<\frac{5\pi}{3}<2\pi \quad \text{, donc} \quad -\pi<\frac{5\pi}{3}-2\pi<0 \quad \text{et} \quad \frac{5\pi}{3}-2\pi=-\frac{\pi}{3}$$

Donc la mesure principale de $\frac{5\pi}{3}$ est $-\frac{\pi}{3}$.

$$-4\pi<-\frac{19\pi}{5}<-3\pi \quad \text{, donc} \quad 0<-\frac{19\pi}{5}+4\pi<\pi \quad \text{et} \quad -\frac{19\pi}{5}+4\pi=\frac{\pi}{5}$$

Donc la mesure principale de $-\frac{19\pi}{5}$ est $\frac{\pi}{5}$.

$$8\pi<\frac{51\pi}{6}<9\pi \quad \text{, donc} \quad 0<\frac{51\pi}{6}-8\pi<\pi \quad \text{et} \quad \frac{51\pi}{6}-8\pi=\frac{3\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$$

Donc la mesure principale de $\frac{51\pi}{6}$ est $\frac{\pi}{2}$.

Exemple :

Sans calculatrice, dire si les réels suivants sont des mesures principales en radians d'angles orientés

$$\frac{7\pi}{5} \qquad -\frac{13\pi}{5} \qquad \frac{\pi}{4} \qquad -\frac{3\pi}{4} \qquad \frac{3\pi}{2} \qquad -\frac{2\pi}{3} \qquad -\frac{7\pi}{6} \qquad \frac{37\pi}{36}$$

Exercices du livre :

n° 48-50-51-53 ? p 288 (mesure principale)

II-2 Propriétés

Travail de l'élève **2.** $ABCD$ est un carré direct de centre O. Lire graphiquement une mesure de chacun des angles orientés ci-dessous :

$(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA})$ $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OB})$ $(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{AC})$ $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AC})$ $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD})$ $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AD})$

Conséquences immédiates

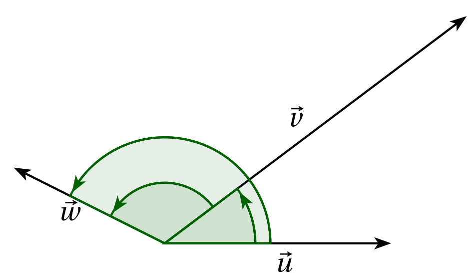
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls. Alors :
- $(\vec{u};\vec{u}) = 0 \quad [2\pi]$ (angle nul)
- $(\vec{u};-\vec{u}) = (-\vec{u};\vec{u}) = \pi \quad [2\pi]$ (angle plat)
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si et seulement si $(\vec{u};\vec{v}) = 0 \quad [2\pi]$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires si et seulement si $(\vec{u};\vec{v}) = \pi \quad [2\pi]$.
- On peut donc dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(\vec{u};\vec{v}) = 0 \quad [\pi]$.

Propriété 4 : *Relation de Chasles (admise)*

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls. On a :

$$(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{w}) \quad [2\pi]$$

Illustration :



Corollaire 1 :

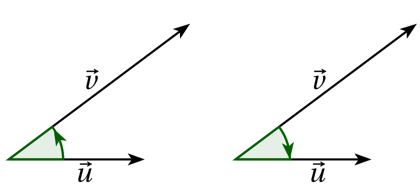
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout $k \neq 0$ on a :

1. $(\vec{u};\vec{v}) = -(\vec{v};\vec{u}) \quad [2\pi]$
2. $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{-v}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) + \pi \quad [2\pi]$
3. $(k\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \quad [2\pi]$
4. $(-\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \quad [2\pi]$

Illustrations de cas particuliers :

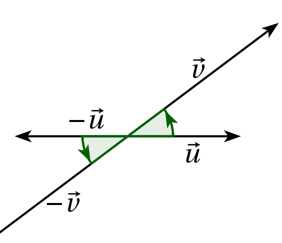
Angles Opposés :

$(\vec{u};\vec{v}) = -(\vec{v};\vec{u}) \quad [2\pi]$



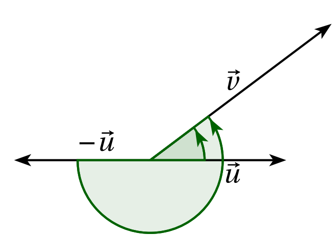
Angles égaux :

$(-\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{v};\vec{u}) \quad [2\pi]$



Angles supplémentaires :

$(-\vec{u};\vec{v}) = \pi + (\vec{u};\vec{v}) \quad [2\pi]$



Preuve **Facultative car relativement évidente avec la définition**

1. D'après la relation de Chasles on a :

$$(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{u})=(\vec{u},\vec{u}) \quad [2\pi]$$

Or $(\vec{u},\vec{u})=0 \quad [2\pi]$ d'où : $\quad (\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{u})=0 \quad [2\pi]$, et finalement :

$$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=-(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}) \quad [2\pi]$$

2. D'après la relation de Chasles on a :

$$(-\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{u})=(-\vec{u},\vec{u}) \quad [2\pi]$$

Or $(-\vec{u},\vec{u})=\pi \quad [2\pi]$ d'où : $\quad (-\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{u})=\pi \quad [2\pi]$, et finalement : $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{-v})=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+\pi \quad [2\pi]$

3. On applique deux fois la propriété précédente.
4. En utilisant deux fois la relation de Chasles on a :

$$(k\vec{u},\vec{v})=(k\vec{u},\vec{u})+(\vec{u},\vec{v}) \quad [2\pi]$$

<u>Cas 1</u> : $k>0$
Dans ce cas, les vecteurs $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens et donc : $(k\vec{u},\vec{u})=0 \quad [2\pi]$.
De même $(\vec{v};k\vec{v})=0 \quad [2\pi]$, et donc :

$$(k\vec{u},k\vec{v})=(\vec{u},\vec{v}) \quad [2\pi]$$

<u>Cas 2</u> : $k<0$
Dans ce cas, les vecteurs $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ n'ont pas le même sens et donc : $(k\vec{u},\vec{u})=\pi \quad [2\pi]$.
De même $(\vec{v};k\vec{v})=\pi \quad [2\pi]$, et donc :

$$(k\vec{u},k\vec{v})=2\pi+(\vec{u},\vec{v}) \quad [2\pi]$$

ce qui donne :

$$(k\vec{u},k\vec{v})=(\vec{u},\vec{v}) \quad [2\pi]$$

Exemple :

ABC est un triangle de sens direct (ie que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est de mesure positive). Démontrer que la somme de ses angles orientés est égales à π.
Notons θ la somme des trois angles dans le sens direct. On a :

$$\theta=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$$

Comme $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA}) \quad [2\pi]$, on peut écrire :

$$\theta=(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \quad [2\pi] \iff \theta=(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB})(2\pi)=\pi \quad [2\pi]$$

Exemple :

Sachant que $(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{3\pi}{4}$, déterminer la mesure principale de : $\quad (2\vec{u};\vec{v}) \qquad (-\vec{v};2\vec{u}) \qquad (3\vec{v};-2\vec{u})$

Remarque : On peut désormais décrire la position d'un point M sur le cercle grâce à la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$.

Exercices du livre : Repère
n° 58 ? 59-60 p 289 (figures)
n° 65-66 p 289 (propriétés)

Exercice 1 **:**
ABCD est un carré tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\dfrac{\pi}{2}$
AEB et BCF sont des triangles équilatéraux tels que $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB})=\dfrac{\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FB})=\dfrac{\pi}{3}$
On se propose de démontrer que les points D, E et F sont alignés en utilisant les angles orientés

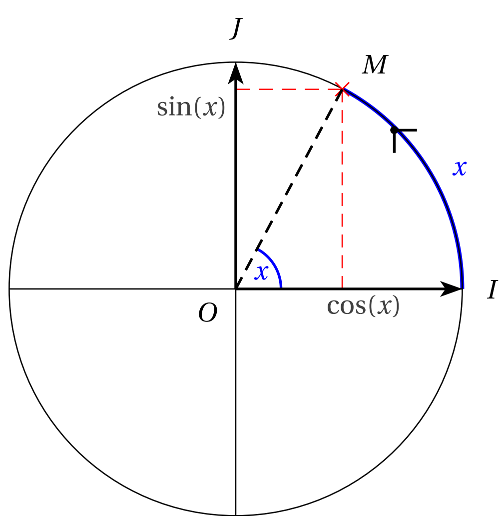
1. Faire un schéma de la situation.
2. **a.** Démontrer que le triangle ADE est isocèle
   b. Démontrer que $(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EA})=\dfrac{5\pi}{12}$
3. Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF})$ et en déduire une mesure de $(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF})$
4. **a.** Utiliser la relation de Chasles pour calculer une mesure de $(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EF})$
   b. Que peut-on en déduire sur les points D , E et F ?

Exercice 2 **:**
A, B, C et D sont des points tels que : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-\dfrac{\pi}{12}\quad[2\pi]$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\dfrac{5\pi}{12}\quad[2\pi]$.
Démontrer que ACD est rectangle.

III) Trigonométrie

III-1 Cosinus et Sinus d'un réel et d'un angle orienté

Définition 3 :
Soit $x\in\mathbb{R}$ et M son point associé sur le cercle $\mathscr{C}$.
On appelle **cosinus** de x, noté $\cos(x)$ l'abscisse de M dans le repère $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$.
On appelle **sinus** de x, noté $\sin(x)$ son ordonnée dans le même repère.
Le cosinus et le sinus d'un angle orienté sont le cosinus et sinus d'une quelconque de ses mesures.



Exemple :

Le nombre réel $\frac{\pi}{2}$ est associé au point J de coordonnées $(0,1)$ dans le repère $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$.
Donc $\cos\frac{\pi}{2}=0$ et $\sin\frac{\pi}{2}=1$

Propriété 5 : *Immédiates*
Pour tout nombre réel x on a :

$$-1\leq\cos(x)\leq 1 \quad \text{et} \quad -1\leq\sin(x)\leq 1$$

$$\cos(x+2k\pi)=\cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x+2k\pi)=\sin(x) \quad \text{où } k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1 \quad \text{(Pythagore)}$$

Remarque : On dispose désormais d'une troisème méthode pour décrire la position d'un point M sur le cercle $\mathscr{C}$.

Exemple :

On donne $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. On cherche la valeur de $\sin\frac{\pi}{12}$.

On sait que $\cos^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{\pi}{12}=1 \iff \sin^2\frac{\pi}{12}=1-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$ Donc

$$\sin^2\frac{\pi}{12}=1-\frac{6+2\sqrt{12}+2}{16}=\frac{16-8-2\times 2\sqrt{3}}{16}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

De plus $0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$ donc $\sin\frac{\pi}{12}>0$. On en déduit :

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

On peut également montrer que $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ est une autre écriture du sinus, plus simple .

Exercices du livre :
n° 79-80 p 291

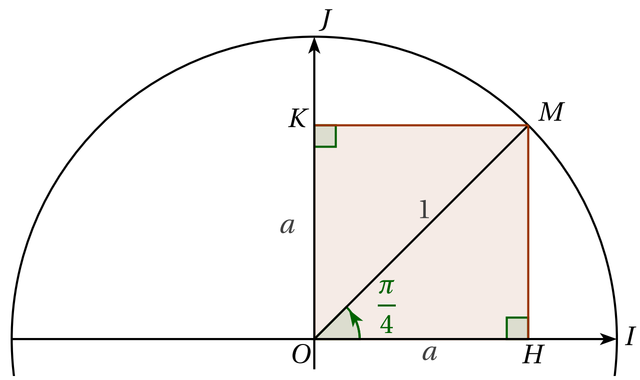
III-2 Valeurs remarquables et angles associés

Le tableau ci-dessous rappelle les valeurs remarquables du cosinus et du sinus pour des valeurs particulières d'un angle orienté θ (en radians).
Il est connaître par coeur.

Angle θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Preuve

Pour calculer les valeurs de $\sin\frac{\pi}{4}$ et de $\cos\frac{\pi}{4}$ on se place dans le quadrilatère $OHMK$ ci-contre, de diagonale $OM = 1$.



On sait que $OHMK$ est un carré, car il possède 4 angles droits et que l'angle $(\overrightarrow{OH};\overrightarrow{OM})$ mesure $\frac{\pi}{4}$.
On appelle a la mesure de son côté.

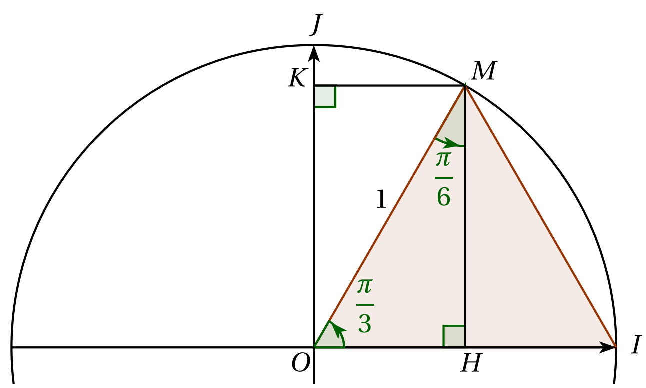
Par définition du cosinus et sinus d'un nombre réel, on a $a = \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$. Cherchons cette valeur.

Dans le triangle OHM rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$OM^2 = OH^2 + MH^2 \iff 1^2 = 2a^2 + a^2 \iff a^2 = \frac{1}{2} \overset{a>0}{\iff} a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc $\boxed{\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Pour calculer les valeurs du cosinus et du sinus de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, on se place dans le triangle OIM ci-contre, de côté $OM = 1$.



On cherche $OH = \cos\frac{\pi}{3}$ et $OK = \sin\frac{\pi}{3}$.

On sait que le triangle OIM est équilatéral car $OM = OI$ et que $(\overrightarrow{OH};\overrightarrow{OM})$ mesure $\frac{\pi}{3}$.

Donc sa hauteur $[MH]$ est aussi sa médiane. D'où H est le milieu de $[OI]$ et $OH = \boxed{\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}}$.
De plus, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle OHM rectangle en H on a :

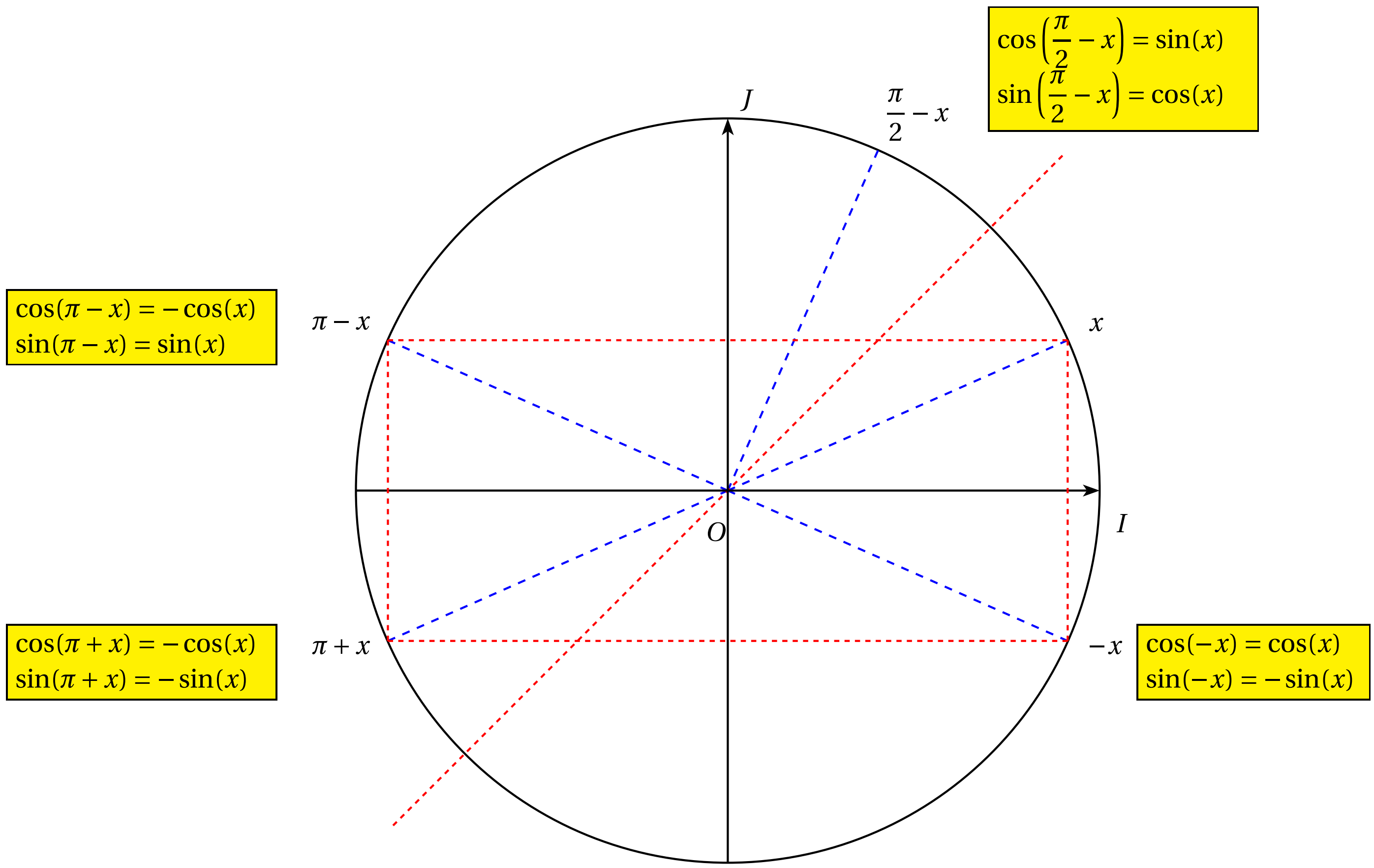
$$OM^2 = OH^2 + MH^2 \iff 1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + OK^2 \iff OK^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \overset{OK>0}{\iff} OK = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc $\boxed{\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

De plus la hauteur $[MH]$ du triangle OIM est aussi sa bissectrice donc $(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MI}) = \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$.

On en déduit dans le triangle OHM rectangle en H que $\boxed{\cos\frac{\pi}{6} = \frac{MH}{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ et $\boxed{\sin\frac{\pi}{6} = \frac{OH}{OM} = \frac{1}{2}}$

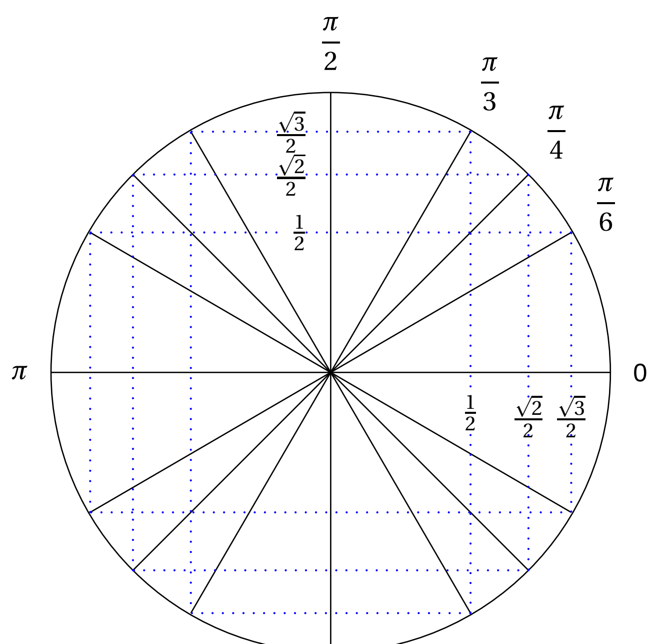
Soit M le point associé à un réel x. Dans le repère $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ on a $M(\cos(x);\sin(x))$.
Grâce à de nombreuses propriétés de symétrie sur le cercle $\mathscr{C}$, on peut déduire les coordonnées des points associés aux réels $-x$, $\pi - x$, $\pi + x$, $\dfrac{\pi}{2} - x$ et $\dfrac{\pi}{2} + x$ (donc la valeur de leur cosinus et sinus).
Sur le schéma ci-dessous, ces points permettent de définir ce que l'on appelle des angles associés.



Exemple :

Grâce aux angles associés, trouver les valeurs des cosinus et sinus des angles suivants :

$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{7\pi}{4}$
$-\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$-\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{5\pi}{3}$
$\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{11\pi}{6}$	$-\dfrac{\pi}{6}$	$-\dfrac{5\pi}{6}$



Exemples :

$$\cos(-\pi-\theta)=\cos\big(-(\pi+\theta)\big)=\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$
$$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$$
$$\cos^2(-x)+\sin^2(\pi-x)=\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$$

Exercices du livre :

n° 73-81-82-83 p 291

III-3 Equations trigonométriques

Travail de l'élève **3.**

Partie A : Equation $\cos x = a$

1. Soit l'équation $\cos x=\frac{1}{2}$ à résoudre dans $\mathbb{R}$.
   - **a.** Placer sur le cercle trigonométrique les points M et M' d'abscisse $\frac{1}{2}$
   - **b.** Déterminer les mesures principales des angles $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'})$.
     En déduire l'ensemble des solutions dans $]-\pi;\pi]$ de l'équation $\cos x=\frac{1}{2}$.
   - **c.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ cette équation.
2. - **a.** Par une méthode analogue, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   - **b.** En déduire les solutions dans $[0;2\pi[$ de cette équation.
3. - **a.** Examiner le cas des équations $\cos x = 1.5$ et $\cos x=-3$.
   - **b.** Donner une condition sur a pour que l'équation $\cos x = a$ puisse admettre des solutions.
4. Soit l'équation $\cos x = 0.25$.
   - **a.** Sur le cercle trigonométrique, placer les images des solutions de l'équation.
   - **b.** On note θ la solution de cette équation dans $[0;\pi[$.
     Exprimer en fonction de θ les solutions de l'équation $\cos x = 0.25$ sur $\mathbb{R}$.
   - **c.** Résoudre cette équation dans $[0;2\pi[$.
     Donner, à l'aide de la calculatrice des valeurs approchées de ces solutions à 10^{-4} près.

Partie B : Equation $\sin x = a$

1. En suivant la même méthode que dans la partie A, résoudre l'équation $\sin x=\frac{1}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$ puis dans $\mathbb{R}$.
2. Même question pour $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donner ensuite les solutions de cette équation dans $[0;2\pi[$.
3. Soit l'équation $\sin x = 0.3$. On note α la solution de cette équation dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
   Exprimer en fonction de α les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = 0.3$.

Le cercle trigonométrique et la configuration des angles associés nous permettent de résoudre des équations du type $\cos x = \cos a$ et $\sin x = \sin a$ où a est un réel connu.

Propriété 6 :

L'équation $\cos x = \cos a$ où $a \in \mathbb{R}$ admet pour solutions les nombres réels $x = a + 2k\pi$ et $x = -a + 2k'\pi$ où k et k' sont des entiers relatifs.

L'équation $\sin x = \sin a$ où $a \in \mathbb{R}$ admet pour solutions les nombres réels $x = a + 2k\pi$ et $x = \pi - a + 2k'\pi$ où k et k' sont des entiers relatifs.

Exemple :

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ et enfin dans $[0;2\pi[$ les équations suivantes :

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin x = -\frac{1}{2} \qquad \cos(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \qquad \cos(2x) = \frac{1}{2} \qquad \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercices du livre :

n° 113 (classiques) + 121-123 (changement de variable) + 132 (inéquations) p 294