Chapitre 4

Vecteurs et droites

Hors Sujet

Titre : « Death Note »

Auteur : Oba et Obata

Présentation succinte de l'auteur : *Death Note* est un manga de type shônen, créé par le scénariste Tsugumi Oba et le dessinateur Takeshi Obata. Il a été prépublié dans un journal de 2003 à 2006, et par la suite publiée en douze tankôbon de 2004 à 2006.

L'histoire est centrée sur *Raito Yagami*, un lycéen surdoué qui juge le monde actuel criminel et corrompu. Sa vie change du tout au tout le jour où il ramasse par hasard un mystérieux cahier intitulé « Death Note ». Ancienne propriété d'un dieu de la mort, le Death Note permet à son utilisateur de tuer toute personne dont il connaît le nom et le visage. Raito décide d'utiliser le Death Note pour exterminer les criminels, dans le but d'éradiquer le Mal et de bâtir un monde parfait dont il sera le dieu.

Mais les nombreuses morts inexpliquées de criminels à travers le monde attirent l'attention d'Interpol et du mystérieux *L*, un détective capable de résoudre n'importe quelle énigme, mais dont personne ne connaît ni le visage ni le nom. L décide d'enquêter pour capturer le tueur en série, surnommé par le grand public « Kira ». Entre Raito et L, tous deux persuadés d'agir pour la justice, s'engage un combat acharné pour découvrir en premier l'identité de l'autre...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée !* »
JOHN LOUIS VON NEUMANN

LEÇON 4

Vecteurs et droites

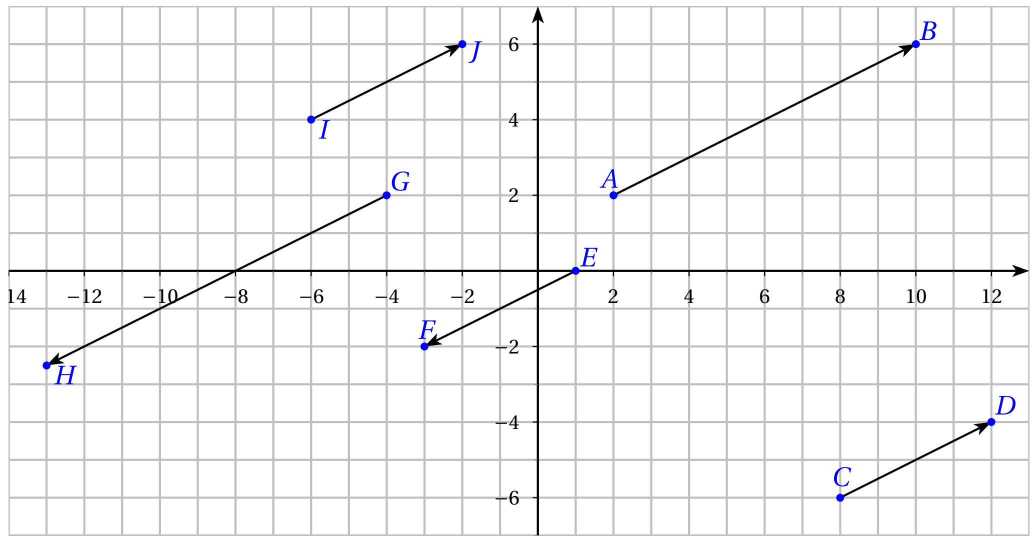
Au fil du temps

On désigne un vecteur par une flèche, plus ou moins longue, qui point dans une direction. Elle n'est ancrée à rien, même si elle peut se fixer sur un point précis d'un objet physique ...
Telle est l'essence étrange des vecteurs, à mi-chemin entre une droite bien concrète et une représentation abstraite. Représentation de quoi ? D'un mouvement ou d'une force physique, comme la gravité qui nous rive au sol ...
Le mot vecteur vient du latin “vector”, dérivé du verbe “vehere”, qui signifie transporter. Un vector pourrait donc désigner un véhicule, par exemple un chariot, son point de départ n'ayant pas d'importance sur sa nature.
De fait, c'est le caractère abstrait des vecteurs qui explique qu'ils aient mis des siècles pour passer de la notion intuitive à un concept mathématique et physique formel, au XIX^e siècle.
En particulier, c'est la nature peu maniable de la droite géométrique, telle que l'avait définie le grec Euclide au III^e avant JC, qui a progressivement conduit à la formalisation des vecteurs. En effet, Euclide décrit dans son ouvrage L*es Elements* la droite comme « une longueur sans largeur », dont « les limites sont des points » et « qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle ». Si ces définitions conduisent à l'idée de distance entre points, cela laisse peut de place aux opérations mathématiques... Quelles manipulations sont permises ? ?
Mais l'oeuvre d'Euclide traverse les siècles et progressivement les manipulations de figures sont associées à des équations algébriques qui libèrent la droite de ses contraintes géométriques, notamment au XI^e sicèle, grâce au le poète, philosophe et mathématicien perse Omar Khayyâm. La symbiose entre la géométrie et l'algèbre se fera au XVII^e siècle, grâce à René Descartes et son invention des coordonnées (dites cartésiennes).
Pourtant c'est la physique, entre 1604 et 1687, qui rendra les vecteurs indispensables, car ils incarneront les notions de vitesse, d'accélération et de force s'exerçant sur un solide. C'est Galilée qui lance ce processus, par la découverte des premières lois du mouvement d'un solide.
Chez Galilée, les notions de vitesse et d'accélération restent informelles, tout comme celle de force qui attire les corps vers le sol, mais elles conduiront l'anglais Isaac Newton, en 1687, à leur donner un sens clair via le concept de vecteur.
Newton instaure également les règles d'addition entre forces, entre accélérations, entre vitesses ... qui sont celles des vecteurs tels qu'on les connait aujourd'hui.
Pour finir, disons que les savants du XIX^e incluront les vecteurs dans un cadre plus large, celui des tenseurs, dont Einstein fera grand usage dans sa théorie de la relativité, qui généralise la théorie de Newton.

I) Vecteurs

I-1 Rappels

Travail de l'élève **1.** Dans Géogébra, on a créé la figure suivante (montrée au vidéo-projecteur, la figure est distribuée aux élèves).



1. **Caractérisation de vecteurs**
   - **a.** Que possèdent en commun les vecteurs créés ?
   - **b.** Que possèdent en plus les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$?
     Et les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CD}$?
     Que dire des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{IJ}$?
     Quel quadrilatère est alors un parallélogramme ?
   - **c.** Quel mot traduit le fait que des vecteurs aient la même direction ?
     Regarder dans Géogébra la relation entre deux vecteurs de la figure de même direction.
   - **d.** Ecrire les égalités vectorielles qui existent entre $\overrightarrow{AB}$ et chacun des autres vecteurs.
2. **Coordonnées de vecteurs**
   - **a.** Que représente les coordonnées de chacun des vecteurs créés que Géogébra inscrit dans sa colonne de gauche ?
   - **b.** Comment peut-on les retrouver pour chaque vecteur à partir des coordonnées de ses points extrêmes ?
   - **c.** Ecrire sous la forme de système les égalités vectorielles de la question 1.d.
   - **d.** Que cela signifie-t-il sur les coordonnées des vecteurs ?
3. **Application**
   Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ? Si oui, préciser le coefficient de colinéarité :

   a. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\12\end{pmatrix}$

   b. $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$

   c. $\overrightarrow{Lolo}\begin{pmatrix}-12\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Néné}\begin{pmatrix}135\\-45\end{pmatrix}$

   d. $\overrightarrow{Fabrice}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Clément}\begin{pmatrix}-2\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$

4. Condition nécessaire et suffisante

On veut s'affranchir de la recherche du coefficient de colinéarité k et trouver un test numérique simple pour prouver la colinéarité de deux vecteurs.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, dont on connait les coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

a. Condition nécessaire : on suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
Traduire ce que cela signifie à l'aide des coordonnées de ces vecteurs.
Montrer qu'en combinant les égalités obtenues, on obtient :
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $xy' - yx' = 0$.

b. Condition suffisante : on suppose que l'on a l'égalité $xy' - yx' = 0$.
Comme $\vec{u}$ est non nul, l'une de ses coordonnées est non nulle, par exemple son abscisse x. Posons alors $k = \dfrac{x'}{x}$ (si x est nul, on prendra alors $k = \dfrac{x}{x'}$ et la méthode restera la même).
Exprimer alors y' en fonction de y.
Que peut-on alors dire sur les coordonnées des deux vecteurs ? Conclure.

c. *Cas particulier* : Que peut-on dire du vecteur $\vec{0}$? Vérifier que la condition fonctionne aussi avec ce vecteur.

5. Application

Dire si les vecteurs suivants sont colinéaires, en utilisant la condition nécessaire et suffisante démontrée ci-dessus.

a. $\overrightarrow{Wanda}\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Nouki}\begin{pmatrix} 3.5 \\ -7.8 \end{pmatrix}$

b. $\overrightarrow{Ana}\begin{pmatrix} 6.4 \\ 3.1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Gui}\begin{pmatrix} 22.4 \\ 10.85 \end{pmatrix}$

c. $\overrightarrow{Dounia}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Nejema}\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 20 \end{pmatrix}$

Définition 1 : *Translation de vecteur*

Le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ symbolise le déplacement rectiligne de A vers B. On l'associe à la translation qui transforme A en B, noté $t_{\overrightarrow{AB}}$.

Caractérisation d'un vecteur

Un vecteur non nul du plan est caractérisé par :

Sa direction — Son sens — Sa longueur

Remarques :

- Un vecteur est indépendant de son point de son origine (point de départ)
- Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ son égaux, on peut leur donner un même nom, par exemple $\vec{u}$.
  On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.
- Il existe un vecteur qui n'a ni direction, ni sens, et de la longueur 0. On l'appelle le *vecteur nul* et on le note $\vec{0}$.
- Deux vecteurs sont dits opposés lorsqu'ils ont la même direction, la même norme, mais des sens opposés.
  On note $-\vec{u}$ l'opposé du vecteur $\vec{u}$. Ainsi l'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$
- La longueur d'un vecteur $\vec{u}$ est aussi appelée norme. C'est un donc nombre positif ou nul. On le note $||\vec{u}||$.
  En particulier : $||\overrightarrow{AB}|| = AB$

Propriété 1 :

Soient A, B, C et D quatre points avec A et B distincts.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

Définition 2 :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées du point M tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$. Si $M(x;y)$, on note $\vec{u}(x;y)$ ou encore $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Remarques :

- Le couple $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ correspond également au déplacement effectué sur le quadrillage.
- Celles-ci sont donc indépendantes de l'origine du repère.
- A partir de maintenant, on se place dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan.
- On en déduit facilement que deux vecteurs sont égaux ssi ils ont les mêmes coordonnées dans un repère.

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x=x \text{ et } y=y'$$

Propriété 2 :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur dans un repère **orthonormal** $(O;\vec{i};\vec{j})$. Grâce au théorème de Pythagore, on montre que :

$$||\vec{u}||=\sqrt{x^2+y^2}$$

Propriété 3 :

Si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$ alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$$

On a donc aussi :

$$AB=||\overrightarrow{AB}||=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Définition 3 : *Somme de vecteurs*

La **somme de deux vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteurs $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$. On le note $\vec{u}+\vec{v}$.

Remarque : On retiendra l'idée que l'on met « bout à bout » les vecteurs puis que les « détours » ne comptent pas, puisque le vecteur somme est le chemin *rectiligne* entre le point de départ du chemin fomé et son point d'arrivée.

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

Propriété 4 : *Relation de Chasles*

Pour tous points A, B et C, on a :

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$

Définition 4 : *Produit d'un vecteur par nombre réel*

Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par k est le vecteur noté $k\vec{u}$. Il est défini comme le vecteur ayant :
- la même direction que $\vec{u}$
- le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, le sens contraire si $k < 0$.
- une norme égale à k fois celle de $\vec{u}$.

Remarque : Soient deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ et k un nombre réel. On a :

$$\vec{u}+\vec{v} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k\vec{u} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

I-2 Colinéarité de deux vecteurs

Définition 5 :

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.

Théorème 1 :

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On a les équivalences suivantes : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

$\iff$ il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

$\iff$ leurs coordonnées sont proportionnelles ($x = kx'$ et $y = ky'$ avec $k \in \mathbb{R}$).

$\iff$ $xy' - x'y = 0$

Preuve

Voir activité.

Exemples :

1. On considère les vecteurs $\vec{u}_1\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2\begin{pmatrix} 5.2 \\ -18.2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3\begin{pmatrix} -6.4 \\ 22.5 \end{pmatrix}$. Lesquels sont colinéaires ?
2. Calculer le réel α pour que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ 14 \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

Exercices du livre : Repère

n° 21-23-24 p 328

Algo : n° 39-40-41 p 329

Exercice 1 **:**

Déterminer le(s) valeur(s) de k telle(s) que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ k+1 \end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix} -k+1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}\begin{pmatrix} k^2+17 \\ 5k-4 \end{pmatrix}$

Exercice 2 :

1. Trouver un réel x tel que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \cos^2(x) \\ -3\sin(x)+6 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} \sin(x) \\ 3 \end{pmatrix}$ soient colinéaires
2. L'opposé de la valeur trouvée précédemment est-elle aussi une solution ?
3. Etes-vous capable de donner d'autres solutions ? toutes les solutions ?

Exercice 3 :

Vrai ou Faux :

1. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3^{22} \\ 1 \\ \overline{3^{25}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3^{71} \\ 9^{12} \end{pmatrix}$ sont colinéaires.
2. Si $\vec{u} = k\vec{v}$ alors il existe k' tel que $\vec{v} = k'\vec{u}$.
3. $\vec{0} = k\vec{0}$
4. $\vec{0} = 0\vec{u}$
5. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ est colinéaire au(x) vecteur(s)

   a. $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b. $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c. $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d. $\vec{z}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. Si deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ sont colinéaires alors :

   a. $a'b - ab' = 0$

   b. $ab' - a'b = 0$

   c. $ab' = a'b$

   d. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$

   e. $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$

I-3 Applications directes

Propriété 5 :
Soient A, B, C et D quatre points du plan deux à deux distincts.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Corollaire 1 :
Soient A, B et C trois points du plan deux à deux distincts.
Les points A, B et C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Méthode
Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de démontrer que deux des vecteurs formés par les trois points sont colinéaires.

Exemple :
On donne $A(-4;-1)$, $B(-1;1)$, $C(3;3)$, $D(-1;-3)$ et $E(5;1)$.

1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.
2. En déduire la nature du quadrilatère $ABED$
3. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

Exemple :

Soit ABC un triangle et M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et N tel que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Montrer que A, M et N sont alignés.

Exercices du livre :

Avec les coordonnées : n° 25 - 27 à 29 - 31 à 38 p 328
Sans coordonnées : n° 72 à 74 - 81 - 86 à 91 - 95 - 96 p 333
Algo : n° 79 - 97 p 333
DM : n° 83 (théorème du trapèze) ? ? ou Barycentre 108-110 p 338 + Centre de gravité 107 p 337 + Droite d'Euler 109 p 338

Exercice 4 **:**

1. Tracer un quadrilatère quelconque $ABCD$.
   Placer les milieux respectifs I, J, K et L des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.
2. Prouver que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

I-4 Décomposition de vecteur

Travail de l'élève **2.**

1. **Lecture.**
   Dès lors que l'on choisit deux vecteurs non colinéaires du plan, on crée un moyen de repérer tous les autres vecteurs de ce plan : on a choisi une base.
   On considère les deux figure suivantes :

Figure 1

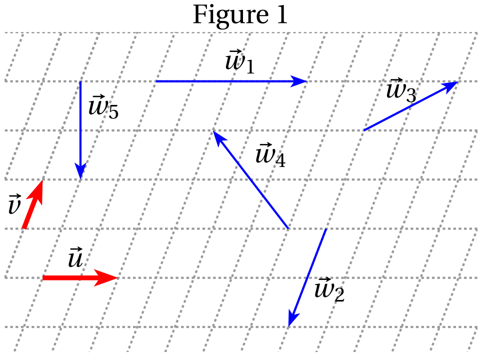
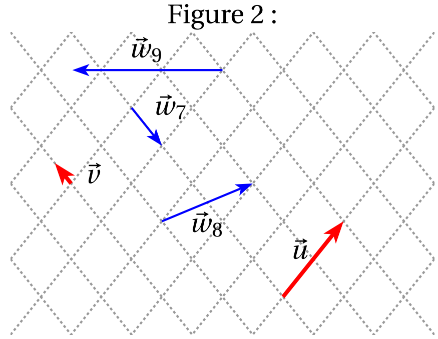


Figure 2 :



   Ecrire chaque vecteur $\vec{w}_i$ sous la forme d'une somme vectorielle du type : $\vec{w}_i = \spadesuit\vec{u} + \clubsuit\vec{v}$ (où le coeur et le trèfle désignent des réels à déterminer).

2. **Utilisation de la décomposition.**
   a. Construire un parallélogramme $ABCD$.
   Placer les points I et J tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}$.
   b. On désire prouver l'alignement des points I, J et C à l'aide de relations vectorielles.
   i. Exprimer $\overrightarrow{AC}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$ et montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}$.
   ii. En déduire l'expression des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$.
   iii. En comparant les deux composition obtenues, prouver que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires. Conclure.

Définition 6 :

On appelle base du plan tout couple de deux vecteurs non colinéaires.

Exemple :

Voir l'activité.

Propriété 6 :

Lorsqu'une base $(\vec{u};\vec{v})$ est définie, tout vecteur $\vec{w}$ du plan s'exprime de manière unique comme la somme de deux multiples de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (on dit que l'on a obtenu une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$) :

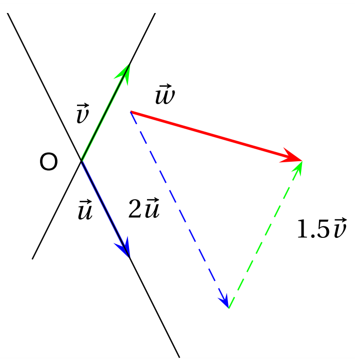
$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

où x et y sont des réels à déterminer.

Preuve

A faire ... Symbole p 186

Exemple :



Remarques :

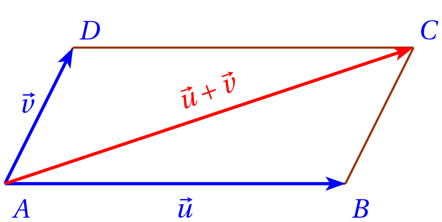
– x et y sont en fait les coordonnées de $\vec{w}$ dans un repère d'origine quelconque et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (on a déjà dit que les coordonnées d'un vecteur ne dépendaient pas de l'origine du repère).

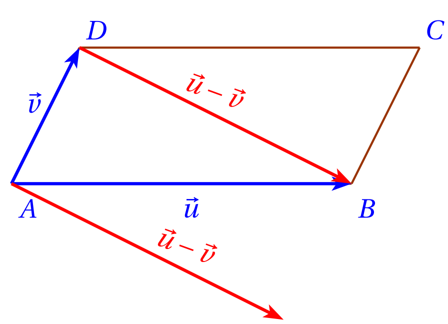
– On représente souvent les vecteurs avec une même origine pour plus de lisibilité.

Relations utiles à connaître

Dans un parallélogramme $ABCD$ on a :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$$





Exercice 5 :

Soit EFG un triangle. Le point I est tel que $\overrightarrow{GI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{GF}$ et H est l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{FE}$. Le point O est le milieu de $[EG]$.

1. Faire une figure.
2. Expliquer pourquoi $\left(F;\overrightarrow{FG};\overrightarrow{FE}\right)$ est un repère du plan.
3. En se plaçant dans ce repère, démontrer que les points I, O et H sont alignés.

Exercice 6 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O tel que $AB=6$ cm.

1. Placer les points E et F tels que $\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
2. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{OE}$ dans les repères suivants :

   a. $\left(D;\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)$
   b. $\left(A;\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)$
   c. $\left(C;\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$
   d. $\left(C;\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)$
   e. $\left(O;\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)$

Exercice 7 :

Soit $ABCD$ un carré de côté a ($a>0$). On considère les deux triangles équilatéraux DCE et DAF extérieurs au carré $ABCD$.
Démontrer que les droites (AC) et (EF) sont parallèles, en vous plaçant dans le repère orthormé $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$.

Exercice 8 :

$ABCD$ est un tétraèdre. Dans le plan (ABC) on définit le point K par $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Faire un figure dans l'espace, puis une figure dans le plan (ABC).
2. En choisissant un repère du plan (ABC), démontrer que K appartient à $[BC]$.

Exercice 9 :

ABC est un triangle. I est le milieu de $[BC]$ et M est un point de la parallèle à (AB) passant par I.
La parallèle à (AC) passant par I coupe la parallèle à (BC) passant par M en N.

1. **a.** Réaliser une figure avec un logiciel de géométrie.
   b. Semble-t-il exister une position du point M pour laquelle :
   – $M=N$?
   – $BCMN$ est un parallélogramme ?
   – $BCNM$ est un parallélogramme ?
2. On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.
   a. Justifier que les coordonnées du point M peuvent s'écrire $\left(k;\frac{1}{2}\right)$ où k désigne un nombre réel.
   b. Exprimer les coordonnées de N en fonction de k.
   c. Justifier les conjectures émises à la question 1.b..

Exercices du livre : Repère

82 p 333 + 92 p 335

II) Vecteurs et Droites

II-1 Vecteurs directeurs d'une droite

II-2 Equation cartésienne d'une droite

II-3 Position relative de deux droites