Chapitre 1

Variables aléatoires

Hors Sujet

Titre : « Et maintenant on va où ? »
Auteur : Nadine Labaki
Présentation succinte de l'auteur : Nominé pour plusieurs prix « *Et maintenant on va où ?* » , de **Nadine Labaki**, a remporté le prix du Jury Oecuménique – Mention Spéciale à Cannes. Après « *Caramel* » , film déjà primé, la réalisatrice revient sur un thème extrêmement contemporain : la cohabitation religieuse.

Le film s'ouvre sur une scène originale, où, des femmes, drapées de noir, endeuillées, entament une danse esthétiquement précise et émotionnellement forte. Les femmes nous regardent comme si elles assistaient à un spectacle et que donc nous étions le film ce qui renforce l'aspect contemporain du sujet. Il s'agit des femmes d'un village, divisé en deux confessions avec d'un côté les musulmans regroupés derrière leur Cheikh, et de l'autre, les catholiques et leur Prêtre. Lors d'une soirée où ils sont tous regroupés devant la télévision, les habitants regardent le journal télévisé qui leur apprend des affrontements entre catholiques et musulmans. Dès lors, les tensions du passé sont ravivées et les hommes ne jurent plus que par leurs religions laissant les femmes abattues par cette situation, mais cherchant des solutions plus originales les unes que les autres pour garder la paix..

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée !* »

JOHN LOUIS VON NEUMANN (RÉALISTE...)

LEÇON 1

Variables aléatoires

Au fil du temps

Alors que les êtres humains se sont intéressés à la géométrie depuis la nuit des temps, et qu'une première présentation rigoureuse (les mathématiciens disent axiomatique) en a été proposée trois siécles avant JC par le grec Euclide, il a fallu attendre le XVI^e siècle pour qu'on s'intéresse enfin aux probabilités, et encore était-ce pour aider les princes à améliorer leurs gains au jeu (c'est d'ailleurs pourquoi on en a gardé le vocabulaire).

Parmi toutes les définitions possibles du hasard, nous en retiendrons deux qui ont influencé la théorie des probabilités :

– pour certains, tout a une cause, et le hasard n'est le reflet que de l'ignorance que nous avons des lois de la Nature. Cet esprit souffla particulièrement au XVIII ème siècle au moment où Laplace posa les bases d'une première théorisation des probabilités. Les probabilités sont alors déterminées a priori, par des considérations non expérimentales. Par exemple, un dé a six faces, donc, on peut poser d'avance que l'événement « obtenir 5 » a une probabilité de $\frac{1}{6}$. Cette symétrie, cette « géométrie du hasard » selon les termes de Pascal, permet de calculer sans ressentir le besoin de recourrir à l'expérience. Elle implique la notion centrale d'équiprobabilité : une probabilité est égale au rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles.
  Cette conception peut apparaître assez naïve : il est illusoire de penser qu'un dé puisse être parfaitement équilibré, mais doit-on être gêné pour autant ?
– pour d'autres, le hasard constitue notre univers, i.e qu'il n'est pas qu'une abstraction mathématiques mais une réalité physique. La théorie du chaos mise en forme par René Thom en 1955 montre en effet que dans certaines situations, on aura beau observer un phénomène pendant un temps très long, on ne pourra prévoir son évolution. De même en physique quantique, la connaissance du passé et du présent ne permettent pas de prévoir mieux des états possibles futurs.

Alors, le hasard, une réalité physique ou une invention mathématiques ? Au lieu de s'opposer, ces deux visions se complètent et il faut les avoir en tête. Ces deux notions ont en commun de postuler que l'issue de l'expérience (le jeté d'un dé) est indépendant de l'observateur, mais ceci peut ne plus être vrai dans certains domaines, comme par exemple l'économie ou la physique quantique.

Dans ce chapitre, nous allons revoir les bases des probabilités, à savoir la construction de modèles pour décrire des expériences aléatoires, ainsi que le vocabulaire et les propriétés de base. Le besoin d'avoir une méthode systématique de modélisation est justifié par le fait que certains résultats nous semblent parfois intuitivement évidents mais sont en réalité faux, comme en témoignent les problèmes d'introduction ci-dessous.
Ensuite, nous découvrirons les variables aléatoires, qui associent des résultats d'expériences aléatoires à des variables telles qu'un gain éventuel. Nous apprendrons alors à déterminer certains paramètres de ces expériences, telles que le gain que l'on peut espérer gagner ou le risque d'un jeu, sans avoir à le réaliser.

I) Notion de hasard

I-1 Quelques problèmes d'introduction

Problème :
A votre avis, quelle est la probabilité que dans un groupe de 30 personnes, deux personnes aient leur anniversaire le même jour de l'année ? ($\simeq 70\%$) Dans un groupe de 60 personnes ? ($\simeq 99\%$)
A votre avis, combien doit-on réunir de personnes pour avoir au moins une chance sur deux que deux personnes de ce groupe aient leur anniversaire le même jour de l'année ? (23 personnes)

Problème :
Un jeu télévisé se déroule de la manière suivante : il y a trois portes, derrière l'une d'entre elles se trouve 10000€ et rien derrière les deux autres. Un candidat choisit au hasard l'une des trois. Ensuite le présentateur élimine une des deux mauvaises portes, tout en conservant celle choisie par le candidat. Le candidat peut alors conserver son choix ou le changer.
Que vaut-il mieux faire pour le candidat, changer ou conserver son choix ? Quelles sont ses chances de gagner dans le premier cas, et dans le deuxième ?

Objectifs : établir une discussion au sein de la classe, percevoir les intuitions de chacun et éveiller la curiosité.
Il n'est absolumment pas prévu de les faire répondre rigoureusement, simplement de trouver des pistes de solution, et de constater l'utilité d'une modélisation mathématique.

I-2 Expérience aléatoire et événements

Travail de l'élève **1.** Au XVI^e siècle, le Grand Duc de Toscane demanda au vénérable Galilée pourquoi il était plus difficile d'obtenir 9 que 10 au jeu de passe-dix (jeu consistant à jeter 3 dés et à faire plus que 10), même s'il n'y a dans les deux cas que 6 combinaisons pour les obtenir.
La grande expérience du Duc en matière de jeu lui avait permis de remarquer ce phénomène, alors que théoriquement, « sur le papier », il aurait dû y avoir la même fréquence d'apparition des deux nombres, puisqu'il y a dans chaque cas 6 manières de les obtenir. Y aurait-il plusieurs réalités (la physique et la mathématique) ?

Modéliser cette expérience aléatoire et proposer une explication à ce phénomène.

Objectifs : Rappeler ce qu'est une modélisation, le vocabulaire, ainsi que quelques bases sur les probabilités.

Lors de la *modélisation* d'une expérience aléatoire, on est amené à choisir successivement :
– Un univers,
– Des parties de cet univers,
– Une loi de probabilité sur cet univers.

Définition 1 :
– Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne connait pas l'issue a priori, mais dont on peut prévoir le type.
– Un des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **éventualité**, **événement élémentaire** ou encore **issue**.
– L'ensemble de toutes les issues possibles *a priori* d'une expérience aléatoire est appelé **univers**. On a pour habitude de noter cet ensemble Ω.
– Lorsque Ω est un ensemble fini, on appelle **cardinal** son nombre d'éléments, noté $\text{Card}(\Omega)$ ou $\#\Omega$.
– Une partie de Ω est appelé **événement**. C'est un sous-ensemble constitué d'issues de l'univers.

Exemples :

- On lance une pièce de monnaie et on s'intéresse à la face obtenue : $\Omega = \{P, F\}$ et Card$(\Omega) = 2$
  Remarquons que rien n'empêche d'ajouter l'issue « Tranche » à cet univers. C'est l'énoncé qui définit l'univers. En l'absence d'indication, on considère tacitement qu'il s'agit de l'univers usuellement utilisé dans telle ou telle situation.
- On lance un dé à 6 faces on regarde si le numéro obtenu est pair ou impair : $\Omega = \{P, I\}$ et $\#\Omega = 2$.
  On remarque que l'univers dépend de l'observation qui est faite.
- On lance deux dés et on fait le produit P des nombres obtenus :
  $\Omega_P = \{1;2;3;4;5;6;8;9;10;12;14;15;16;18;20;24;25;30;36\}$ et Card$(\Omega) = 19$.
  La partie $A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$ de l'univers est un événement qui peut se décrire par la phrase : « Obtenir un multiple de 6 ».

Exemples :

Il existe aussi des expériences aléatoires qui comportent une infinité d'issues :

- Choisir au hasard un entier naturel $\Omega = \mathbb{N}$ (ce type d'ensemble est dit *infini dénombrable*)
- Choisir au hasard un réel entre 0 et 1 : $\Omega = [0;1]$ (*infini non dénombrable*)
- Choisir un nombre premier au hasard : $\Omega = \{\text{Nombres premiers}\}$ (*infini dénombrable*)

Dans tout ce chapitre, on considère désormais expérience aléatoire d'univers fini $\Omega = \{\omega_1;\omega_2;\ldots;\omega_n\}$ (Card$(\Omega) = n$).

I-3 Loi de probabilité

Définition 2 :

Définir une loi de probabilité P sur Ω c'est associer à chaque éventualité $\omega_i \in \Omega$ un nombre $p_i \in [0;1]$ de sorte que :

- $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$
- La probabilité d'un événement A, notée $P(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Remarques :

- Les nombres p_i sont les probabilités des événements élémentaires ω_i. On a $p_i = P(\omega_i)$.
- On a $P(\Omega) = 1$.
- Pour tout événement A, on a $0 \leq P(A) \leq 1$.
- L'univers peut contenir des événements impossibles, à partir du moment où l'on définit la loi P de telle sorte que leur probabilité soit nulle.
- Loi des Grands Nombres :
  Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire pouvant conduire à des issues $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ la fréquence de réalisation de chaque événement élémentaire $\{\omega_i\}$ se stabilise aux environs d'un nombre p_i compris entre 0 et 1. Ce nombre peut être considéré comme la probabilité de réalisation de l'événement $\{\omega_i\}$

Exemple :

Soit un dé truqué dont les probabilités des faces d'apparitions sont données par le tableau suivant :

Eventualité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$0,05$	$0,05$	$0,1$	$0,1$	$0,2$	a

1. Calculer la probabilité de l'éventualité : « le dé tombe sur 6 ».
2. Calculer la probabilité de l'événement A =« obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».
3. Calculer la probabilité de l'événement B =« obtenir un nombre premier ».
4. Calculer la probabilité de l'événement C = « obtenir un nombre pair ».

Exemple :

Dans le cas d'un dé parfaitement cubique, chaque face a autant de chances qu'une autre d'apparaître et on choisira comme loi de probabilité celle qui a chaque éventualité associe le nombre $\frac{1}{6}$

Considérons un dé où tous les nombres ont les mêmes chances d'apparitions sauf 1 et 2 qui apparaîssent deux fois plus souvent. La loi de probabilité convenant à cette expérience est telle que :

$$p_1 = p_2 = 2p_3 = 2p_4 = 2p_5 = 2p_6 \qquad \text{Notons } a = p_3\text{, alors } p_1 = 2a$$

Comme

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

on a $2a + 2a + a + a + a + a = 1 \iff 8a = 1 \iff a = \frac{1}{8}$

Au final on peut résumer la loi de probabilité que l'on choisira pour modéliser cette expérience dans le tableau suivant :

Eventualité	1	2	3	4	5	6	Total
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Exercices du livre :

n° 29 p 198

I-4 Equiprobabilité

Définition 3 :

Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité ou que la loi de probabilité est équirépartie.

Propriété 1 :

Lorsque la loi de probabilité est équirépartie, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éventualités favorables}}{\text{nombre d'éventualités possibles}} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Exemples :

1. Dans un jeu de 32 cartes, la probabilité de tirer le valet de coeur est $\frac{1}{32}$.
   Celle de tirer un valet est $\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$.
   Celle de tirer un coeur est $\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$.
2. On lance deux fois une pièce équilibrée et l'on note les faces obtenues.
   L'univers Ω est $\Omega=\{PP;PF;FP;FF\}$ et chaque éventualité a la même probabilité $\frac{1}{4}$.
   La probabilité de l'événement A « obtenir Pile et Face » $=\{PF;FP\}$ est donc $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.
   La probabilité de l'événement B « obtenir au plus une fois pile » $=\{FF,PF,FP\}$ est $P(B)=\frac{3}{4}$.

II) Probabilité d'événement

II-1 Base de la théorie des ensembles

Les mathématiques utilisent toutes sortes d'ensembles (finis, infinis dénombrables, infinis non dénombrables). Le but de cette partie n'est pas de faire une étude complète de la théorie des ensembles (trop complexe) mais de proposer une approche intuitives des notions les plus utilisées de cette théorie dans le domaine des probabilités.
Ainsi, nous ne tenterons pas de définir rigoureusement ce qu'est un ensemble. Disons simplement qu'un ensemble s'apparente à une liste (finie ou non) d'objet distincts possédant un certain nombre de propriétés communes (par exemple l'ensemble des nombres entiers naturels multiples de 2, ou encore l'ensemble des polynômes de degré 2, ...).
Un ensemble se note avec des accolades. On considère ces objets dans leur globalité sans tenir compte d'un ordre éventuel. Par exemple si E est l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs à 9 alors :

$$E=\{0;2;4;6;8\}=\{2;8;4;6;0\}$$

On utilisera les symboles $\in$ et $\notin$ pour signifier qu'un élément appartient ou non à un ensemble :

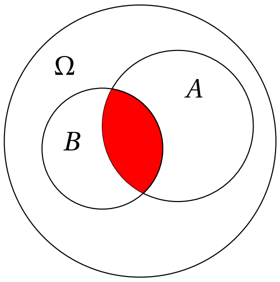
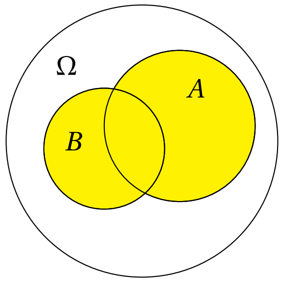
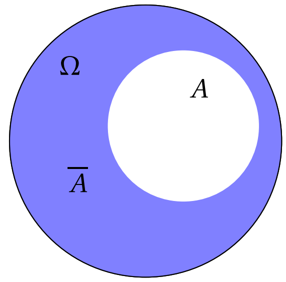
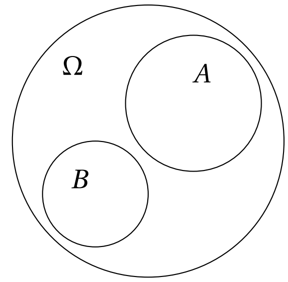
$$2\in E \qquad \text{et } 3\notin E$$

Enfin nous noterons $\emptyset$ l'ensemble qui n'a pas d'éléments (ensemble vide).

Travail de l'élève **2.** Une urne contient deux jetons rouges marquées R_1 et R_2 et deux jetons jaunes marquées J_2 et J_3.
On tire au hasard un premier jeton dans l'urne, puis, sans le remettre, on tire au hasard un deuxième jeton.
On note à chaque tirage la couleur et le numéro obtenu.

1. Quel est l'univers de cet expérience ?
2. Ecrire sous forme d'ensemble les événements suivants, puis déterminer leur probabilité :
   – A :« Obtenir deux jetons de même couleur ou de même numéro »
   – B : « Obtenir deux jetons portant des numéros ayant un écart de 1 »
   – C : « Obtenir A et B »

Objectifs : Réinvestir le vocabulaire vu précédemment, ainsi que l'équiprobabilité.
Travailler sur les ensembles.
Utiliser les arbres de probabilité vu en seconde.

$A \cap B$	$A \cup B$	$\overline{A}$	$A \cap B = \emptyset$
Intersection de A et B : Eléments communs de A et B	**Réunion de A et B :** Eléments de A ou B (voire les deux)	**Complémentaire de A :** Eléments de Ω non dans A	**A et B sont disjoints** : Aucun élément commun à A et B
			

Exemples :

On considère les ensembles suivants :

- $\Omega = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$
- $A = \{2;4;6;8\}$
- $B = \{1;2;3;4;7\}$
- $C = \{2;6\}$
- $D =$« Tirer un roi (dans un jeu de cartes) »
- $E =$ « Tirer un coeur (dans un jeu de cartes) »
- $F =$ « Tirer une figure (dans un jeu de cartes) »

Alors :

1. $C \subset A$ $\quad D \subset F$
2. $A \cap B = \{2;4\}$ $\quad B \cap C = \emptyset$ donc B et C sont disjoints (ou incompatibles)
   $D \cap E =$« Tirer le roi de coeur »
3. $A \cup B = \{1;2;3;4;6;7;8\}$ $\quad A \cup C = A$
   $D \cup E =$« Tirer un coeur ou un roi » (15 cartes)
4. $\overline{A} = \{0;1;3;5;7\}$ $\quad \overline{E} =$« Tirer un pique, un carreau ou un trèfle »

Remarque : On a toujours

$$\emptyset \subset A \qquad A \cup \overline{A} = \Omega \qquad A \cap \overline{A} = \emptyset$$

Exercices du livre :

n° 24 p 196 (symboles)

II-2 Quelques propriétés

Travail de l'élève **3.** Test de confiance p 180

Objectifs : Réinvestir les rappels précédents (vocabulaire, propabilité, théorie des ensembles).
Utiliser un tableau, comme appris en seconde.
Retrouver les formules apprises en seconde (probabilité du complémentaire, de la réunion).

Propriété 2 :
Si deux événements A et B sont **incompatibles**, alors la probabilité de leur réunion est égale à la somme de leurs probabilités :

Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Preuve
Si l'un des événements A et B est l'ensemble vide, alors la relation précédente est évidente.
Dans le cas contraire, $P(A)$ est la somme des probabilités des éléments de A et $P(B)$ est la somme des probabilités des éléments de B. Puisque A et B sont disjoints, $A \cup B$ contient exactement tous les éléments de A et tous ceux de B. Par conséquent $P(A) + P(B)$ est égal à la somme des probabilités des élements de $A \cup B$, i.e $P(A \cup B)$

Proposition 1 :
Pour tous événements A et B de Ω on a :

$$P(\emptyset) = 0 \qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

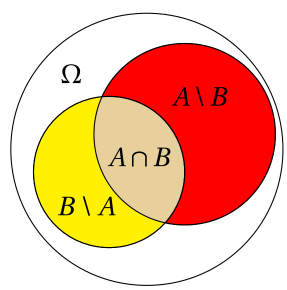
Preuve

1.
$$1 = P(\Omega) = P(\emptyset \cup \Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega) = P(\emptyset) + 1$$
D'où $P(\emptyset) = 0$.

2.
$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$
D'où $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

3. Tout repose sur ces découpages en événements disjoints deux à deux :

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$
$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$



Ainsi

$$\begin{aligned}
P(A) + P(B) - P(A \cap B) &= P\Big((A \setminus B) \cup (A \cap B)\Big) + P\Big((B \setminus A) \cup (A \cap B)\Big) - P(A \cap B) \\
&= P\Big(A \setminus B\Big) + P\Big(A \cap B\Big) + P\Big(B \setminus A\Big) + P\Big(A \cap B\Big) - P(A \cap B) \\
&= P\Big(A \setminus B\Big) + P\Big(A \cap B\Big) + P\Big(B \setminus A\Big) \\
&= P\Big((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)\Big) \\
&= P(A \cup B)
\end{aligned}$$

D'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemple :

Dans une classe, 10% des élèves jouent d'un instrument à cordes, 20% jouent d'un instrument à vent et 5% jouent d'un instrument à corde et d'un instrument à vent. On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité qu'il joue d'un instrument à cordes ou à vent ?

Exemple :

Dans un club, plusieurs activités sont proposés dont le tir à l'arc et le golf. Parmi les 50 adhérents, 30 pratiquent le tir à l'arc, 18 le golf et 6 les deux sports. Quelle est la probabilité pour qu'un adhérent choisi au hasard :

1. pratique le tir à l'arc ? le golf ?
2. pratique l'un au moins des deux sports ?
3. ne pratique ni le tir à l'arc, ni le golf ?

Exercice 1 :

Dans un univers Ω, on donne deux événements A et B incompatibles tels que $p(A) = 0,2$ et $p(B) = 0,7$.
Calculer $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$, $p(\overline{A})$ et $p(\overline{B})$.

Exercice 2 :

Les résultats au bac 2009 ont battu des records de réussite, voici quelques chiffres :

Séries	Effectifs des reçus	Effectifs des filles reçues	Taux de réussite
Littéraire	47 765	37 878	87.1
Economique	90 466	56 994	88.5
Scientifique	148 531	69 810	89.6
Total	286 762	164 682	88.8

1. On édite le diplôme d'un bachelier (fille ou garçon) de la session 2009. Quelle est la probabilité pour que ce soit celui d'un bachelier scientifique ?
2. On édite le diplôme d'un bachelier de la session 2009 de la série économique. Quelle est la probabilité pour que ce soit celui d'une bachelière ?
3. On édite le diplôme d'une bachelière de la session 2009. Quelle est la probabilité pour que ce soit celui d'une bachelière littéraire ?

Exercice 3 :

On lance n dés ($n \geq 1$). On note A l'événement « obtenir au moins un 6 »

1. Décrire $\bar{A}$ puis exprimer en fonction de n la probabilité $P(\bar{A})$
2. En déduire que $P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$
3. Compléter le tableau suivant :

gain n	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(A)$								

4. Combien de dés faut-il lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\frac{3}{4}$?

Exercice 4 :

On souhaite répondre à la question suivante : dans une même classe, y a-t-il plus d'une chance sur deux pour qu'au moins deux élèves de la classe aient la même date d'anniversaire ?
On considérera une classe de 30 élèves et, pour simplifier, on dira qu'une année comporte 365 jours.

1. Combien existe-t-il de listes différentes contenant 30 dates d'anniversaire (identiques ou non) ?
2. Notons A l'événement « au moins deux élèves de la classe ont la même date d'anniversaire ».
   a. Exprimer en français l'événement $\overline{A}$.
   b. Quel est le nombre de cas favorables à $\overline{A}$?
   c. Répondre à la question posée en début d'exercice.

Exercices du livre :

n° 27 p 197 (algobox + aire sous parabole)

III) Variable aléatoire

III-1 Définition

Travail de l'élève **4.** L'éducation coûte trop cher. Afin de réaliser des économies, le gouvernement syldave a décidé de se passer à la fois de correcteurs et d'élèves. Tout est simulé dans les bureaux du ministère, le but étant d'obtenir une moyenne nationale satisfaisante à présenter aux investisseurs étrangers qui se rueront en Syldavie pour profiter d'une main d'œuvre aussi qualifiée.
Le candidat virtuel jette un dé virtuel : s'il sort un 6, il a 20, s'il tombe sur un autre numéro pair il a 10, s'il tombe sur un numéro impair, il a 5.
Quelle moyenne nationale peut *espérer* obtenir le ministre ? Cette moyenne est-elle une moyenne ? Cette moyenne sera-t-elle effectivement atteinte ?

Les derniers syldaves touchant un salaire pour leur travail coûtent encore trop cher aux entreprises. Un nouveau système de rémunération a donc été mis au point par l'ancien ministre de l'éducation syldave installé aujourd'hui au ministère des finances.
Pour garder son emploi, le salarié doit chaque mois verser 1000 neurones à l'entreprise puis doit lancer un dé.
S'il sort un 6, il touche 3000 neurones : les 1000 versés au départ par le salarié plus 2000 versés par l'entreprise.
Dans les autres cas, l'entreprise garde les 1000 neurones.
Quelle salaire un employé peut-il espérer toucher ?
Que se passera-t-il si l'entreprise propose 5000 neurones au lieu des 2000 ? Et si elle propose 1 000 000 000 de neurones avec un dé à 100 faces pour un versement initial de 1 000 000 de neurones ?

Objectifs :
– Introduire la notion de variable aléatoire, la présentation d'une loi de probabilité ...
– Donner du sens à la notion d'espérance, critiquer la valeur trouvée (atteinte ou non, ce qu'elle n'indique pas ...)

Définition 4 :
On appelle **variable aléatoire** toute fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, notée en général X.
Autrement dit, définir une variable aléatoire sur Ω c'est à associer un réel x_i à chaque éventualité ω_i.

Remarque : Soit x_i le réel associé à l'issue ω_i de l'univers. On note $(X = x_i)$ l'événement « la variable aléatoire X prend la valeur x_i »

Exemple :

On lance trois pièces de monnaie, que l'on numérote 1 ; 2 et 3. Le jeu qui consiste à gagner 1 € chaque fois que F apparaît et à perdre 1 € chaque fois que P apparaît

La fonction X qui, à chaque issue, associe le gain (positif ou négatif) correspondant, est une variable aléatoire sur Ω.

Définition 5 : *Proposition (Admise)*

La **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X est la fonction de $X(\Omega)$ dans $[0;1]$, qui à chaque $x_i \in X(\Omega)$ associe le nombre $P(X = x_i)$.

Remarques :

– Il s'agit bien d'une probabilité sur $X(\Omega)$.

– On représente cette loi à l'aide du tableau ci-dessous :

Valeurs x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_m	Total
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_m	1

Nous utiliserons désormais toutes ces notations.

Exemple :

Dans l'exemple ci-dessus, la loi de probabilité du gain X est résumée dans le tableau suivant :

gain x_i	-3	-1	1	3	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Exercices du livre :

n° 36 (arbres) + 41 (cartes) + 42 (tennis) p 199 + 44 (arbres) p 200

III-2 Paramètres : espérance et variance

***Travail de l'élève* 5.** On reprend l'activité précédente sur les élèves de Syldavie.
Pour rentrer à l'université de Springfield, ils sont mis en compétition avec les élèves de Groland.
Cette université privilégie les élèves du pays au meilleur résultat moyen espéré et la sa régularité.
A Groland également, on a décidé de tirer les résultats du baccalauréat aux dés. Voici la règle : Lorsqu'on obtient 6 au dé, l'élève a 20. Un autre nombre pair fournit un 5 à l'élève. Ensuite s'il sort 1, l'élève a 0, s'il sort 3, l'élève a 10 et enfin, s'il sort 5, l'élève a 15.

1. Calculer la moyenne nationale que peut espérer obtenir Groland.
2. De quels moyens dispose-t-on pour comparer la régularité de chacun des pays ?

Objectifs :

– Réinvestir ce que les élèves viennent d'apprendre sur les variables aléatoires.

– Parler d'étendue, écart interquartile, écart à la moyenne (sans valeur absolue, avec) ... suivant leurs idées (recherche en groupe)

– Introduire le sens de la variance et de l'écart-type.

Définition 6 :
L'espérance mathématique de X est le nombre $E(X)$ définie par :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{m} x_i\times p(X=x_i)=\sum_{i=1}^{m} x_i pi = p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_mx_m$$

La variance de X est le nombre $V(X)$ définie par :

$$V(X)=\sum_{i=1}^{m}[x_i-E(X)]^2p(X=x_i)=\sum_{i=1}^{m}[x_i-E(X)]^2pi=[x_1-E(X)]^2p_1+\cdots+[x_m-E(X)]^2p_m$$

L'écart-type de X est le nombre $\sigma(X)$ définie par :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

Remarques :
- On a choisi d'utiliser les carrés pour la variance de manière arbitraire pour ne pas avoir de problèmes de signes ; on aurait pu choisir une autre méthode, mais celle-ci a l'avantage de rappeler la distance euclidienne bien connue. La variance est en ce sens homogène au carré d'une distance. L'écart-type définit donc une distance proprement dite.
- Lorsque X représente le gain du joueur à un jeu de hasard, $E(X)$ représente le gain moyen qu'il peut espérer par partie, lorsqu'on joue un grand nombre de fois. L'écart type est une caractéristique de la dispersion des valeurs de X, autrement dit, cela représente le risque du jeu.
- Vous pouvez obtenir ces valeurs très facilement à l'aide de vos calculatrices. Il suffit de rentrer les valeurs prises par la variable aléatoire en liste 1, et les probabilités en liste 2.

Exemples :
Dans l'exemple précédent et calculer l'espérance, la variance et l'écart-type. Interpréter vos résultats.
Mêmes questions pour les deux exemples de l'activité.

Propriété 3 :
La variance se calcule plus facilement grâce à la formule :

$$V(X)=\sum_{i=1}^{m} x_i^2pi-\big(E(X)\big)^2$$

Remarque : On note encore $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

Preuve

$$\begin{aligned}V(X) &= \sum_{i=1}^{m}\big(x_1-E(X)\big)^2p_i\\ &= \sum_{i=1}^{m}\big(x_i^2-2x_iE(X)+(E(X))^2\big)p_i\\ &= \sum_{i=1}^{m}x_i^2p_i-2E(X)\sum_{i=1}^{m}x_ip_i+\big(E(X)\big)^2\sum_{i=1}^{m}p_i\end{aligned}$$

Preuve (Suite)

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{m} x_i^2 p_i - 2E(X)E(X) + \big(E(X)\big)^2 \times 1 \\ &= E(X^2) - 2\big(E(X)\big)^2 + \big(E(X)\big)^2 \\ &= E\big(X^2\big) - \big(E(X)\big)^2 \end{aligned}$$

Exercices du livre :

48 ou 50 p 200 (classiques) + 61 p 202 (TI et somme de va) + 68 p 204 (arbres) + 72 p 205 (avec n) + 59 p 202 (implication) + 74 p 206 (algo) + 2 p 213 (tableur) + Odyssée p 298 (sur TI)

Propriété 4 :

Soient a et b deux réels.

L'espérance est linéaire : $E(aX+b) = aE(X)+b$

On en dédut la formule : $V(aX+b) = a^2V(X)$

Preuve

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= Card\big(ax_i+b\big)p_i = \sum_{i=1}^{m}\big(ax_ip_i + bp_i\big) \\ &= a\sum_{i=1}^{m} x_ip_i + b\sum_{i=1}^{m} p_i \\ &= aE(X)+b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= \sum_{i=1}^{m}\big(ax_i+b\big)^2 pi - \big(E(aX+b)\big)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m}\big(a^2x_i^2 + 2abx_i + b^2\big)pi - \big(aE(X)+b\big)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} a^2x_i^2p_i + 2ab\sum_{i=1}^{m} x_ip_i + b^2\sum_{i=1}^{m} pi - \big(a^2E^2(X) + 2abE(X) + b^2\big) \\ &= a^2\sum_{i=1}^{m} x_i^2p_i + 2abE(X) + b^2 - a^2E^2(X) - 2abE(X) - b^2 \\ &= a^2\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2p_i - E^2(X)\right) \\ &= a^2V(X) \end{aligned}$$

Exercices du livre :

79 p 206 + 84 p 207

Exercices du livre :

DM : 81 p 207 (équivalence) + 82 p 207

Exercice 5 **: Challenge**

Combien y a-t-il de façons de choisir 2 délégués parmi les élèves de votre classe ?