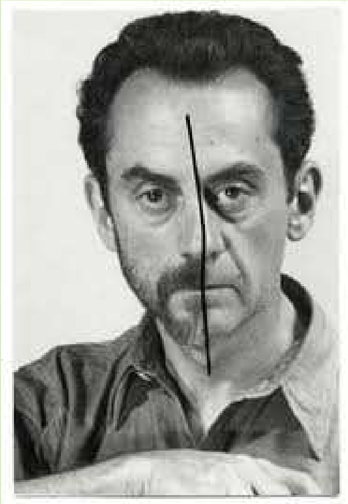
CHAPITRE 1

# POLYNÔMES DE DEGRÉ 2



## HORS SUJET

**TITRE** : « Les larmes »

**AUTEUR** : MAN RAY

**PRÉSENTATION SUCCINTE DE L'AUTEUR** : Man Ray, né Emmanuel Rudzitsky en 1890, à Philadelphie, est un peintre, photographe et réalisateur de films, acteur du dadaïsme à New York, puis du surréalisme à Paris.

Sa carrière commence à New York, avec son ami proche Marcel Duchamp. Ils forment la branche américaine du mouvement Dada. Après quelques expériences artistiques infructueuses, Man Ray conclut que « Dada ne peut pas vivre à New York ».

En 1921 Man Ray arrive à Paris où il rencontre divers surréalistes. Il s'installe dans le quartier du Montparnasse, rencontre et tombe amoureux de la chanteuse française et modèle Kiki de Montparnasse. Man Ray révolutionne l'art photographique.

Avec notamment Max Ernst, Joan Miró et Pablo Picasso, il présente ses oeuvres à la première exposition surréaliste de la galerie Pierre à Paris en 1925. En 1928, il tourne son troisième film Les Mystères du château de Dé.

En 1940, après la défaite de la France, Man Ray s'embarque pour les États-Unis en compagnie du couple Dalí et du cinéaste René Clair. A Hollywood, il reçoit des propositions d'exposition, rencontre une femme, Juliet, et décide de se remettre à peindre.

Man Ray est mort le 18 novembre 1976, à Paris. Inhumé au cimetière du Montparnasse), on peut lire sur sa tombe son épitaphe : « Unconcerned, but not indifferent » (« Détaché, mais pas indifférent »).


Document réalisé à l'aide de LaTeX

Auteur : C. Aupérin

Site : wicky-math.fr.nf

Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

## Table des matières



« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

# LEÇON 1

# Polynômes de degré 2

**Au fil du temps**

Nous allons étudier les polynômes du second degré, ie de la forme $ax^2+bx+c$, où $a$, $b$ et $c$ sont des constantes connues (et $a \neq 0$).
La représentation graphique de ce genre de fonction est une parabole, courbe que l'on retrouve dans la nature, comme par exemple la trajectoire des jets d'eau d'une fontaine, des astres, les rebonds d'une balle de tennis, les dunes de sables dans le désert ... Les antennes pour le câble sont également en forme de parabole, d'où leur nom.
On a découvert les paraboles dès l'antiquité, grâce à *Appolonius de Perga*, qui étudiait les sections planes du cône. Au V$^{ème}$ siècle, la pensée mathématique s'épanouit dans le moyen orient, sous l'impulsion géniale d'*Al Khwarizmi*. Son nom est à la base du mot algorithme. En effet, c'est lui qui le premier s'intéressa à mettre en place une méthode générale de résolution d'équations en fonction de leur type.
La nouveauté apportée par Al-Khwarizmi correspond à une véritable évolution des mentalités : il ne s'agit plus de résoudre des problèmes arithmétiques ou géométriques que l'on peut traduire en équations, mais de partir des équations, dont chacune recouvre une classe infinie de problèmes variés.
Il est également le premier à résoudre couramment des équations du second degré dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, *Al Khwarizmi* à trouver un algorithme permettant de résoudre toutes les équations de la forme $ax^2+bx+c=0$, et lorsque l'on a sur un problème qui aboutit à une telle équation, il n'y a plus qu'à le suivre ! C'est cet algorithme que nous allons découvrir.
Au XVII$^{e}$ siècle, *Newton* démontre que la trajectoire d'un corps seulement soumis à son poids est une parabole. A cette époque, on sait déjà résoudre depuis environ un siècle les équations du second degré dans un ensemble de nombres que vous découvrirez, contenant $\mathbb{R}$ et de nouveaux nombres, appelés imaginaires (par opposition à réels) ou encore complexes.

# I) Définition

***Travail de l'élève*** **1.** Un rectangle a pour périmètre $P = 14$ m et pour aire $S = 12\ m^2$. Quels sont les dimensions de ce rectangle ?

**Objectifs et commentaires :**

– Faire modélisation la situation aux élèves :
Poser $x$ et $y$ les dimensions de ce rectangle, et obtenir : $x + y = 7$ et $xy = 12$
– Manipuler les écritures littérales et le système pour aboutir à l'équation $x^2 - 7x + 12 = 0$
– Les faire s'interroger sur les diverses manières de résoudre une telle équation.
Graphiquement ? Tableau de valeurs ? Calculs ?
– Dans cette activité, il se trouve que $x = 3$ et $y = 4$ sont solutions. On peut préférer proposer le même exercice avvec $P = 21$ et $S = 27$ pour trouver des solutions moins évidentes (4.5 et 6)

**Définition 1 :**
On appelle **polynôme du second degré** ou encore **trinôme** toute expression pouvant s'écrire $ax^2 + bx + c$ où $a$, $b$ et $c$ sont des réels avec $a \neq 0$

**Exemples :**

1. $x^2 - 4x + 1 \qquad (a = 1; b = -4; c = 1)$
2. $-7x^2 + 4x \qquad (a = -7; b = 4; c = 0)$
3. $\sqrt{2}x^2 \qquad (a = \sqrt{2}; b = 0; c = 0)$
4. $(x+1)^2 \qquad (a = 1; b = 2; c = 1)$

**Contre-Exemple :**

1. $3x + 1$ est un binôme du premier degré
2. $x^3 + 2x + 3$ est un polynôme du $3^{ème}$ degré
3. $(x+1)^2 - x^2$ est un binôme du premier degré.
4. $2x^2 + \dfrac{1}{x}$ n'est pas un trinôme du $2^{nde}$ degré.

**Propriété 1 :**
Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $Q(x) = a'x^2 + b'x + c'$ deux trinômes.

$P$ et $Q$ sont égaux si, et seulement si $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$

**Remarque :** On dit que $P = Q$ si, et seulement si $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
A partir de cette année, on notera par le symbole $\forall$ l'expression « pour tout » .
On peut donc écrire de manière plus condensée :

$$P = Q \iff P(x) = Q(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

***Preuve***

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$ . Il est alors clair que $P = Q$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons maintenant que $P = Q$.
On a alors : $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c', \quad \forall x \in \mathbb{R}$

***Preuve (Suite)***

Si l'égalité est vraie pour tout réel $x$, elle l'est en particulier pour $x = 0$.
On obtient alors que $c = c'$.
L'égalité devient donc :

$$ax^2 + bx = a'x^2 + b'x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En particulier, si on choisit $x = 1$ on obtient : $a + b = a' + b'$
Si on choisit maintenant $x = -1$ on obtient : $a - b = a' - b'$

On a donc le système $\begin{cases} a + b = a' + b' \\ a - b = a' - b' \end{cases}$ formé par les deux conditions trouvées sur les coefficients.

En ajoutant membre à membre les deux lignes, on obtient : $2a = 2a' \iff a = a'$.
En soustrayant désormais membre à membre les deux lignes, on obtient : $2b = 2b' \iff b = b'$.

Donc si $P = Q$ alors $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$
Au final, on a montré que :

$$P = Q \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$$

**CQFD**

**Exemple :**

Soit $P(x) = x^2 - x - 1$ et $Q(x) = \left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$. Démontrer que $P = Q$

**Définition 2 :**

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme. On appelle **racine** de $P$ toute valeur de la variable $x$ solution de l'équation du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

**Exemples :**

1. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ sont des racines du trinôme de l'exemple précédent.
2. Vérifier que 3 est racine du trinôme $2x^2 - 5x - 3 = 0$
3. Trouver les racines du polynôme $x^2 - 7 = 0$

**Problème :**

D'une manière générale, comment trouver les racines du polynôme $ax^2 + bx + c$ ? Existe-t-il un algorithme permettant de trouver les racines de n'importe quel trinôme ?

## II) Forme canonique d'un trinôme

***Travail de l'élève* 2.**

- Soit l'activité « Garder la forme » du Repère p 8 (les questions 1 et 2 peuvent être traitées entièrement sans le professeur)
- Soit l'exercice 42 p 30 (1er exemple fait ensemble au tableau ) + 1 factorisation où $a \neq 1$.

**Objectifs et commentaires :**

- L'activité p 8 est bien pour les rappels sur les différentes écritures du trinôme, et le lien avec la courbe représentative, mais peu appropriée pour la découverte de la factorisation.
- Par contre, l'exercice p 42 ne nécessite pas de rappels, mais on peut en profiter sur le 1er exemple pour revenir sur les avantages des trois écritures : racine(s) du trinôme, tableau de signes et tableau de variations.

A partir de maintenant, on note $P(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme quelconque.

***Méthode pour transformer l'écriture de $P(x)$***

On factorise par $a$ ($a \neq 0$) : $P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

On écrit le début de la parenthèse à l'aide de deux carrés, grâce à l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

On remplace et on réduit : $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\mathbf{b^2-4ac}}{4a^2}\right)$

**Définition 3 :**

Cette dernière expression, de la forme $a\left((x+\alpha)^2 + \beta\right)$ s'appelle la **forme canonique** du trinôme $P$.
On appelle **discriminant** du trinôme, le nombre réel noté $\Delta$, défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

On peut alors écrire :

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

**Remarque :** Les intérêts de cette écriture sont nombreux :

- Factoriser le trinôme lorsque ce sera possible (on pourra alors dire si le polynôme possède ou non des racines, et lesquelles, ainsi que connaître son signe)
- Dresser le tableau de variations de la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et tracer sa représentation graphique avec précision.

**Exemple :**

« Canoniser » le trinôme $x^2 - 7x + 12$. Le factoriser si c'est possible.

**Exercices du livre :**
*Repères* : 42 à 46 p 30 (mettre sous forme canonique des trinômes, les factoriser si possible)
+ 58 p 32 (système $3\times 3$ pour trouver l'expression d'un trinôme)
+ 66 p 34 (quelques propriétés sur les coefficients d'un trinôme)

## III) Factorisation d'un trinôme et résolution de l'équation $P(x)=0$

On a vu que : $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$

**1.** Si $\Delta<0$, cette expression ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$ (voir l'activité pour le raisonnement, question 3b.)
Dans ce cas, l'équation résoudre $ax^2+bx+c=0$ revient à résoudre

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=0 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

Comme $\Delta<0$ on voit clairement que l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution.

**2.** Si $\Delta=0$, on a alors l'expression factorisée : $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\right)$
Dans ce cas, l'équation résoudre $ax^2+bx+c=0$ revient à résoudre

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \iff x+\frac{b}{2a}=0 \iff x=-\frac{b}{2a}$$

L'équation $ax^2+bx+c=0$ possède alors une solution réelle (dite double) $x=-\dfrac{b}{2a}$.

**3.** Enfin si $\Delta>0$, on peut utiliser l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= \left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0 \\ &= \left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'équation résoudre $ax^2+bx+c=0$ revient à résoudre :

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\iff \left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0 \\ &\iff x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

L'équation $ax^2+bx+c=0$ possède alors deux solutions réelles $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

**Proposition 1 :**
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant d'un trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$ le trinôme ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$
- Si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1$ et $x_2$ sont les racines du trinôme

***Preuve***
Voir ci-dessus

**Théorème 1 :**
1. Si $\Delta < \mathbf{0}$ : l'équation n'a pas de solution réelle
2. Si $\Delta = \mathbf{0}$ : l'équation a une solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
3. Si $\Delta > \mathbf{0}$ : l'équation a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

***Preuve***
Voir ci-dessus

**Remarques :**
- Les formules obtenues pour $\Delta > 0$ s'étendent à $\Delta \geq 0$
- Si les coefficients $a$ et $c$ sont de signes opposés, alors le trinôme admet deux racines ; en effet, dans ce cas $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

**Exemple :**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2 - 4x + 4 = 0$
2. $-6x^2 + x + 1 = 0$
3. $5x^2 + 6x + 2 = 0$
4. Répondre au problème initial
5. $x^2 - 2x = 0$
6. $x^2 - 5 = 0$

**Exercices du livre :**
*Repères :* 37 à 41 p 30 (calculs simples du discriminant)
+ 49-50 p 31 + 59 p 32 (discussion avec paramètres)
+ 56 p 32 (trouver l'expression d'un trinôme à partir de sa courbe représentative)
+ 68-69-71 p 34 (liens entre les racines d'un polynômes)

## IV) Signe d'un trinôme

On cherche à connaître le signe d'un trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ suivant les valeurs de $x$.

1. Si $\Delta < 0$, on utilise la forme canonique. On sait que :

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Comme $\Delta$ est négatif, l'expression entre crochets est positive, le signe de $P(x)$ est donc le même que celui de $a$.

**2.** Si $\Delta = 0$, on a :

$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Le signe de $P(x)$ est donc le même que celui de $a$.

**3.** Si $\Delta > 0$ alors en notant $x_1$ et $x_2$ ses racines, telles que $x_1 < x_2$, on a :

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Établissons le tableau de signe :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - x_1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x - x_2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x - x_1)(x - x_2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $P(x)$ | | Signe de $a$ | $0$ | Opposé de $a$ | $0$ | Signe de $a$ | |

**Théorème 2 :**
Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de $a$ sauf entre les racines lorsqu'elles existent. En particulier, lorsque $\Delta < 0$, le trinôme est de signe constant.

***Preuve***
Cf ci-dessus

**Exemple :**
Résoudre l'inéquation $x^2 - 4x + 1 \leqslant 0$

**Exercices du livre :**
72-73 p 35 (lien expression/courbe/signe)
+ 75 p 36 (signe d'un trinôme)

## V) Représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2

**Définition 4 :**

On appelle **fonction polynôme du second degré** toute fonction $f$, définie sur $\mathbb{R}$, pouvant se ramener à la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ où } a,\ b \text{ et } c \text{ sont des réels avec } a \neq 0$$

**Théorème 3 :**

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une **parabole**. Elle est tournée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$.

Son axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Son sommet est le point $S$ de coordonnées $S\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

***Preuve* partielle**

D'après la forme canonique l'équation de la courbe s'écrit encore :

$$y = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

ce qui s'écrit encore $Y = aX^2$ dans le repère où $Y = y + \dfrac{\Delta}{4a}$ et $X = x + \dfrac{b}{2a}$. Ceci est donc l'équation d'une parabole.

Le signe de $a$ conditionne donc l'orientation de cette parabole.

La forme canonique nous permet aussi de lire les coordonnées de $S$.

La courbe représentative d'une fonction dans un repère orthogonal admet l'axe de symétrie vertical $x = -\dfrac{b}{2a}$ si et seulement si pour tout $h \in \mathbb{R}$ on a $f\left(-\dfrac{b}{2a}+h\right) = f\left(-\dfrac{b}{2a}-h\right)$.

Or, $\forall h \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{b}{2a}+h\right) &= a\left(-\frac{b}{2a}+h\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}+h\right)+c \\
&= a\left(\frac{b^2}{4a^2} - 2\frac{b}{2a}h + h^2\right) - \frac{b^2}{2a} + bh + c \\
&= \frac{b^2}{4a} - bh + ah^2 - \frac{b^2}{2a} + bh + c \\
&= \frac{b^2}{4a} + ah^2 - \frac{b^2}{2a} + c
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{b}{2a}-h\right) &= a\left(-\frac{b}{2a}-h\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}-h\right)+c \\
&= a\left(\frac{b^2}{4a^2} + 2\frac{b}{2a}h + h^2\right) - \frac{b^2}{2a} - bh + c \\
&= \frac{b^2}{4a} + bh + ah^2 - \frac{b^2}{2a} - bh + c \\
&= \frac{b^2}{4a} + ah^2 - \frac{b^2}{2a} + c
\end{aligned}$$

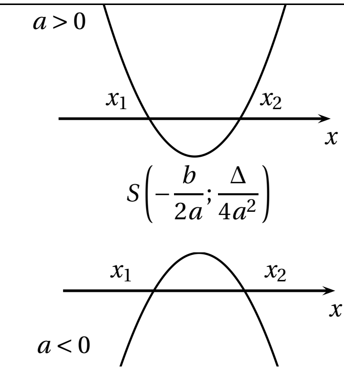
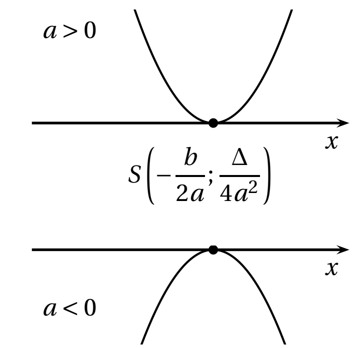
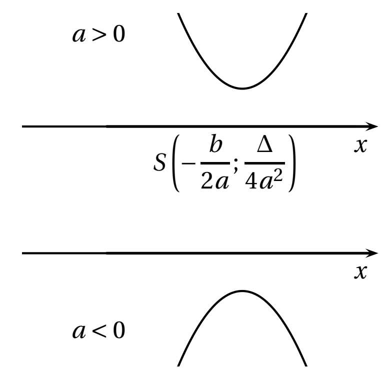
Donc $\forall h \in \mathbb{R}$ on a bien $f\left(-\dfrac{b}{2a}+h\right) = f\left(-\dfrac{b}{2a}-h\right)$.

D'où l'axe de symétrie vertical $x = -\dfrac{b}{2a}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction $f(x)$.

**Exercices du livre :**

51 à 55 p 31 (lien expression/courbe/signe)
+ 63 p 33 (choix de méthode pour trouver l'extremum)
+ 74 p 36 (signe à partir de la symétrie de la courbe)
**Approfondissement** : 67 p 34 (résolutions d'équations avec racines carrés, penser aux ensemble de définition ! !)

**Résumé** : $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ $\qquad \Delta = b^2 - 4ac$

| $\Delta$ | **Factorisation** | **Racines** | **Signe** de $P(x)$ | **Parabole** |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta > 0$ | $a(x-x_1)(x-x_2)$ | Deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ | $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline \text{Signe de } P(x) & & \text{Signe de } a & 0 & \text{Opposé de } a & 0 & \text{Signe de } a & \end{array}$ |  |
| $\Delta = 0$ | $a(x-x_0)^2$ | Une racine : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ | $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & x_0 & & +\infty \\ \hline \text{Signe de } P(x) & & \text{Signe de } a & 0 & \text{Signe de } a & \end{array}$ |  |
| $\Delta < 0$ | pas de factorisation | Aucune racine réelle | $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline \text{Signe de } P(x) & & \text{Signe de } a & \end{array}$ |  |

## VI) Algorithmie et programmation

***Un peu d'histoire***

Dans l'antiquité, les mathématiques sont utilisées pour les besoins quotidiens, tels que des calculs d'aires de champs, d'impôts lors des crues du Nil, de constructions. Elles servent aussi à résoudre des problèmes dans lesquels figure une (ou plusieurs) quantité inconnue à trouver.
Vers 1800-1500 avant JC, les Babyloniens savent déjà résoudre des équations du $1^{er}$ et du $2^{nd}$ degré. On parle de "chose" à trouver et on suit un discours logique phrasé (peu clair pour nous aujourd'hui) pour arriver à une solution.
Ce n'est qu'au VIII$^e$ siècle, avec l'introduction de la numération positionnelle, des chiffres arabes et du zéro, que la théorie générale prend place peu à peu. Le point de départ est de désigner dans des calculs l'inconnue par un symbole (aujourd'hui souvent la lettre $x$) puis de mettre en équation les problèmes.
Rapidement, on comprend l'intérêt d'une telle méthode. C'est *Al-Khawarizmi* qui le premier s'intéresse à cela et classifie les différents types d'équations, afin que dans chaque problème, on n'ait plus qu'à reconnaitre le type d'équation et suivre la méthode générale appropriée, menant à la solution. Le mot ***algorithme*** découle de son nom et désigne aujourd'hui ***une procédure à suivre, à partir d'un élément donné, pour arriver à une solution unique***.
Jusqu'au début du XIX$^e$, trouver des algorithmes de résolutions d'équations constituent la préoccupation principale des algébristes. Ils développent la notation symbolique et la conventionnent : au XVI$^e$ Viete sépare l'alphabet en deux, le début désignant plutôt les paramètres, la fin les inconnues, ce qui est encore utilisé de nos jours. On catégorise les équations suivants leurs paramètres, leur degré et leur nombre d'inconnues, afin de généraliser le plus possible leur résolution.Parallèlement, la notion de fonction prend forme.
Les équations de degré 3 sont résolues par les italiens Tartaglia et Cardan au XVI$^e$ siècle, et celles de degré 4 par l'élève de ce dernier, Ferrari. L'histoire des formules de résolution s'arrête là, car le français Evariste Galois (1811-1832) montre au XIX$^e$ qu'il est impossible de trouver des formules de résolution pour les équations de degré supérieur ou égal à 5.

**Définition 5 :**

Un **algorithme** est une suite d'instructions, qui, une fois exécutée correctement, conduit à un unique résultat.

**Exemples :**

Indiquer un itinéraire allant d'un lieu à un autre, télécharger un ficher, compresser des données, les jeux vidéos, les feux tricolores, les lumières de la tour Eifel, le pilote automatique des avions, la cryptographie ...
En mathématiques, vous connaissez déjà l'algorithme d'Euclide qui permet de trouver le pgcd de deux nombres entiers positifs.
Les Babyloniens suivaient un algorithme très performant pour trouver une valeur approchée de la racine carré d'un nombre.

**Remarques :**

- Pour fonctionner, un algorithme doit contenir uniquement des instructions compréhensibles par celui qui devra l'exécuter
- En mathématiques, les algorithmes consistent par exemple en des suites d'opérations à effectuer (pour les fonctions notamment), ou des suites de manipulations à faire (pour construire une figure géométrique).

### Exemple : Vocabulaire, démarche et rédaction

On souhaite un algorithme qui donne le type d'extremum d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, sa valeur approchée et quand il est atteint.

1. **Détermination des variables : analyse préliminaire**
   - **a.** Quelles sont les informations initiales dont nous avons besoin ?
     On les appelle les *entrées* de l'algorithme.
   - **b.** Quelle condition avons-nous sur l'une de ces entrées ?
   - **c.** Que doit-on calculer ?
     On prendra l'habitude de faire afficher le(s) résultat(s) de l'algorithme, que l'on appelle *sortie(s)*.
     L'ensemble des données de l'algorithme pouvant variées (entrées-sorties) sont les *variables*.
2. **Rédaction du processus français : l'algorithme**
   On commence toujours un algorithme en énonçant les variables mises en jeu (désignées par des lettres), et en précisant leur nature (nombre, mot ...)
   *Saisir* une donnée permet à l'utilisateur d'attribuer une valeur à une variable (ce sont les entrées).
   Lorsque la donnée remplie par l'utilisateur ne remplit pas l'une des conditions initiales, il faut lui redemander. On utilisera la boucle « *Tant que* » pour le faire jusqu'à ce que la donnée satisfasse toutes les conditions nécessaires.
   *Affecter* à une donnée une certaine valeur permet d'attribuer une valeur à une variable.
   *Afficher* permet à l'utilisateur de voir un texte entre guillemets ou la valeur d'une variable à l'écran.
   La boucle *Si* sert à différencier des cas.
   Compléter l'algorithme suivant :

**Algorithme 1 : *Extremum d'un trinôme***

**Entrées**
    ...., ...., ...., ...., .... sont des nombres réels

**Début**
    Saisir ....
    **Tant que** ( ......... ) **Faire**
        Afficher "Erreur : ......................................................"
        Saisir ....
    **Fin Tant que**
    Saisir ........ et ........
    Affecter à ........ la valeur .....
    Affecter à ........ la valeur .....
    **Si** ( ........ ) **Alors**
        Afficher "La fonction f admet pour ............ "
    **Sinon**
        Afficher "La fonction f admet pour ............ "
    **Fin Si**
    Afficher ...... " atteint en " ......
**Fin**

3. **La programmation : sur Algobox et sur TI**
   Trouver comment programmer cet algorithme sur Algobox et sur votre calculatrice (ie avec le vocabulaire adapté au support) .

***Exercice 1*** :

Ecrire un algorithme qui donne la valeur du $\Delta$ d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, ainsi que son nombre de racines éventuelles et leurs valeurs.
Le programmer sur votre calculatrice.