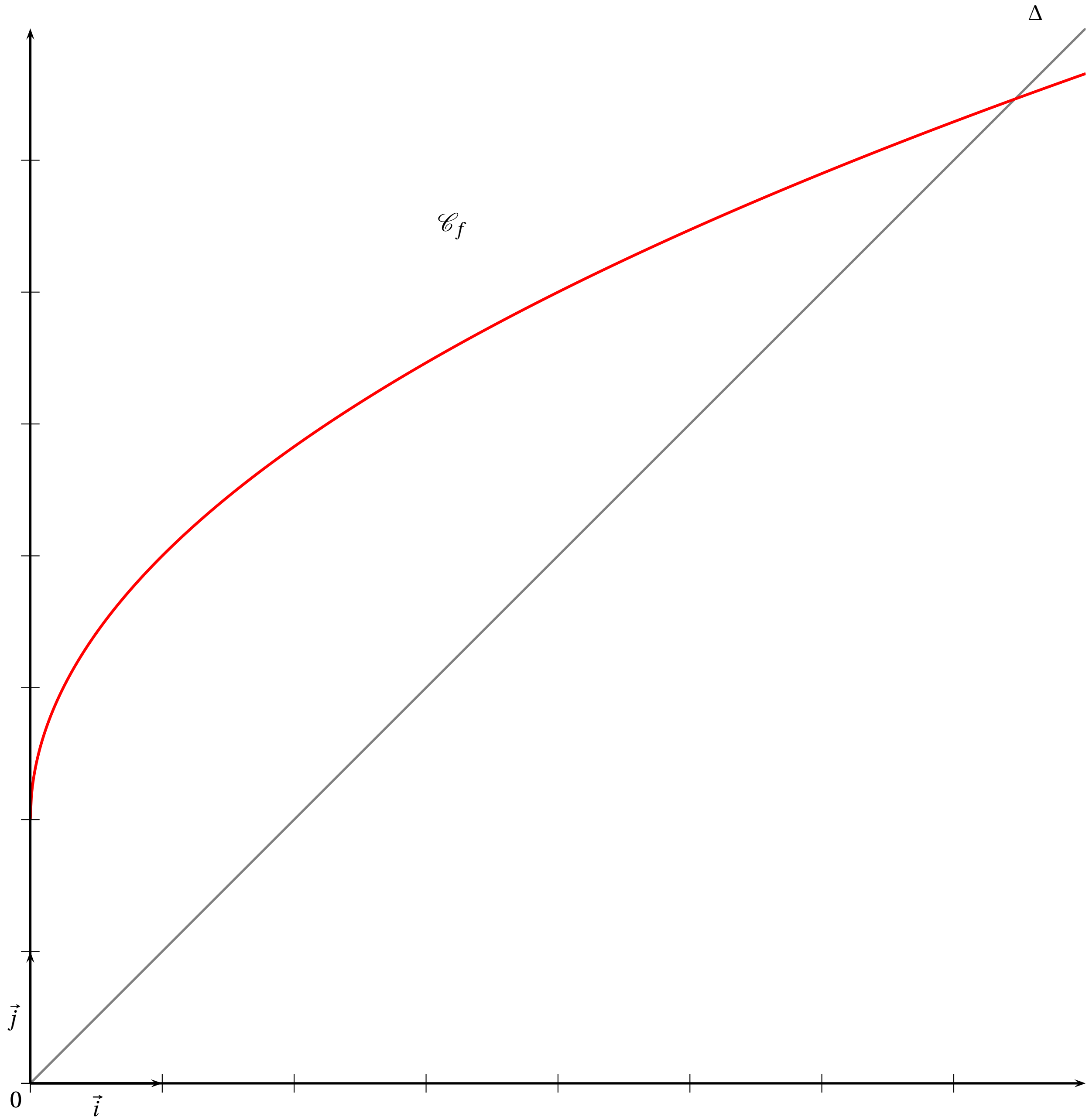
Exemple :

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 2$ et $u_0 = 1$
On considère la fonction f vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ définie par $f : x \longmapsto 2\sqrt{x} + 2$.
On a représenté ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f et la droite Δ d'équation $y = x$, puis on a suivi les mêmes étapes que pour l'exemple précédent.

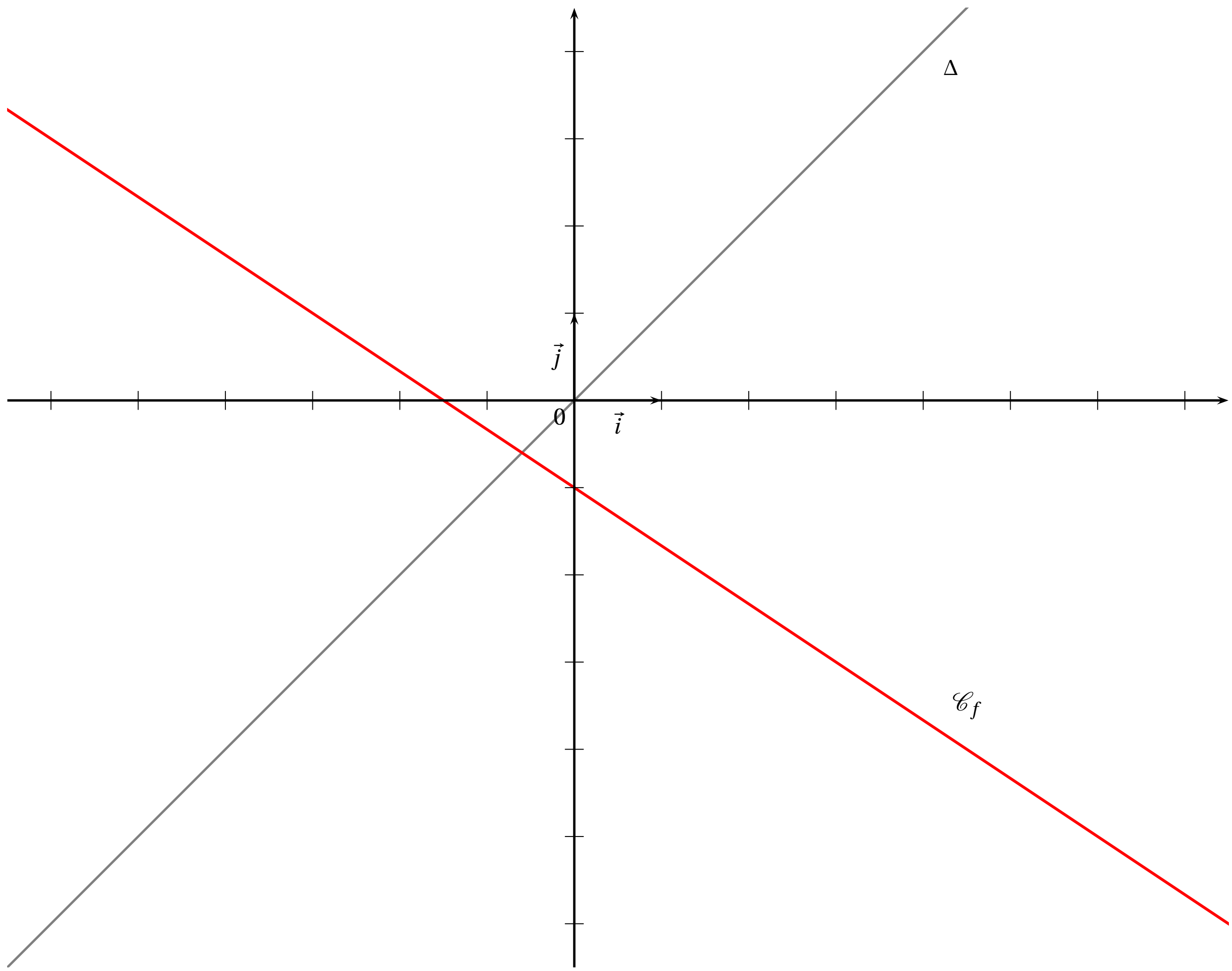


Exemple :

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par $u_{n+1} = -\dfrac{2}{3}u_n - 1$ et $u_0 = 7$

On considère la fonction f vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ définie par $f : x \longmapsto -\dfrac{2}{3}x - 1$.

On a représenté ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f et la droite Δ d'équation $y = x$, puis on a suivi les mêmes étapes que pour l'exemple précédent.

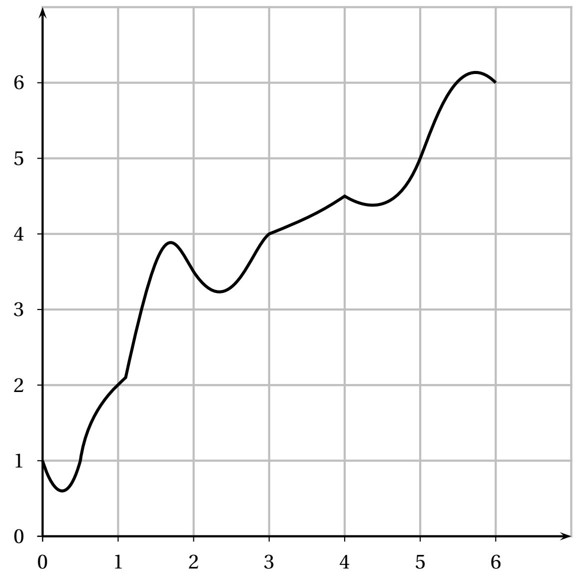


__Travail de l'élève__ **3.** Soient les suites (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 2n+3 \qquad v_n = 5 \times 0.8^n \qquad w_n = 5 \times (-0.8)^n \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} t_0 = 4 \\ t_{n+1} = t_n - 3 \end{cases}$$

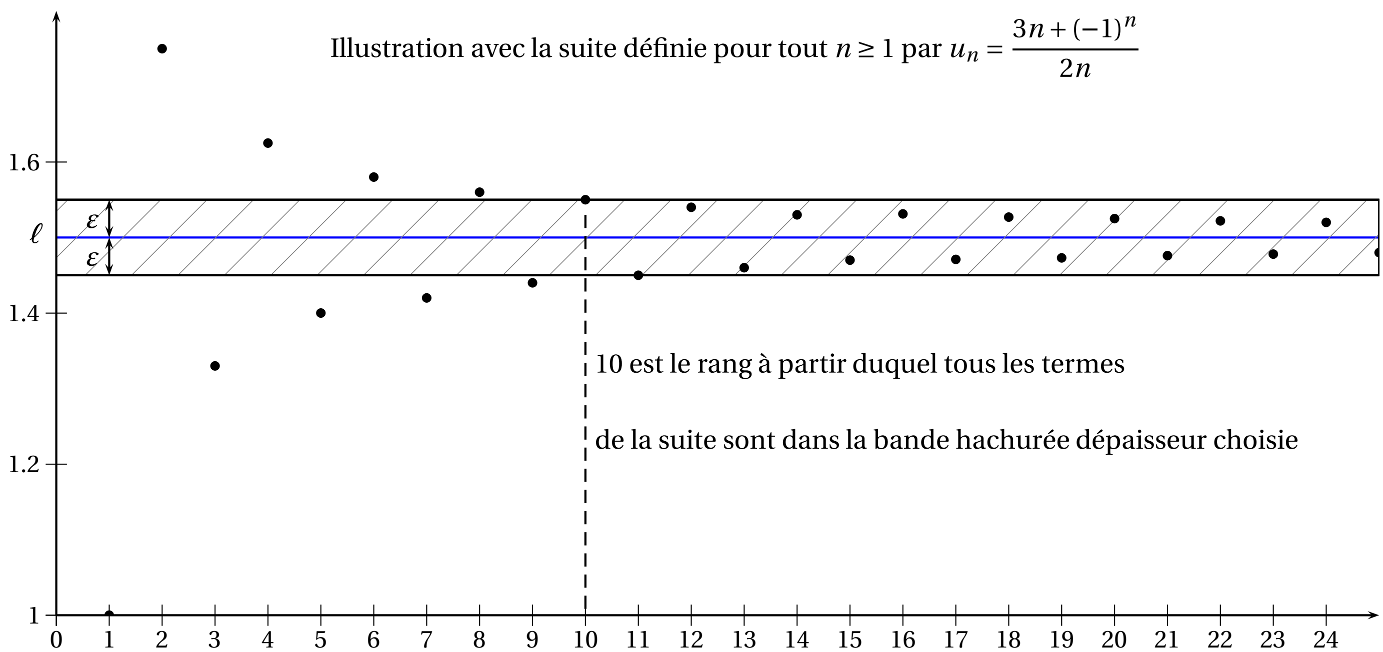
Comparer pour tout $n \in \mathbb{N}$ les termes suivants :

1. u_{n+1} et u_n. **2.** v_{n+1} et v_n. **3.** w_{n+1} et w_n. **4.** t_{n+1} et t_n.



Exemple :

Graphiquement, cela se traduit ainsi :



- Le graphique permet de conjecturer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \ldots\ldots$
- Ici on a choisi $\varepsilon = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et on a trouvé que pour $N = \ldots\ldots\ldots\ldots$, tous les termes de la suite (u_n) étaient dans l'intervalle $]\ldots\ldots\ldots\ldots;\ldots\ldots\ldots\ldots[$ pour $n \geq \ldots\ldots$
- Si on avait choisi $\varepsilon = 0.1$, on aurait trouvé que pour $N = \ldots\ldots\ldots\ldots$, tous les termes de la suite (u_n) étaient dans l'intervalle $]\ldots\ldots\ldots\ldots;\ldots\ldots\ldots\ldots[$ pour $n \geq \ldots\ldots$
- Si on avait choisi $\varepsilon = 0.04$, on aurait trouvé que pour $N = \ldots\ldots\ldots\ldots$, tous les termes de la suite (u_n) étaient dans l'intervalle $]\ldots\ldots\ldots\ldots;\ldots\ldots\ldots\ldots[$ pour $n \geq \ldots\ldots$

Travail de l'élève **2.** On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.
La suite (u_n) est définie par $u_0=3$ et pour tout $n\geq 0$ on a $u_{n+1}=f(u_n)=\sqrt{u_n}$.

Partie A : Tracer les premiers termes sur l'axe des abscisses

1. Tracer soigneusement la courbe $\mathscr{C}$ représentant f et la droite Δ d'équation $y=x$ sur $[0;3]$ dans un repère orthonormé avec pour unité 5 cm.

2. **a.** Placer u_0 sur l'axe des abscisses. Placer $u_1=f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.

b. Placer le point A_1 de Δ d'ordonnée u_1. Quelle est son abscisse ?
Placer alors u_1 sur l'axe des abscisses.

c. Sachant que $u_2=f(u_1)$, expliquer comment construire u_2 sur l'axe des abscisses. Le construire.

3. Construire ainsi, pas à pas, sur l'axe des abscisses, les premiers termes de la suite jusqu'à u_5.

4. Comment se poursuivrait le tracé si on pouvait agrandir le graphique ?
Emettre des conjectures sur le comportement de la suite (u_n).

Partie B : Influence du premier terme

1. Sur votre calculatrice, afficher de même les premiers termes de la suite (v_n) définie par $v_0=0.1$ et pour tout n, $v_{n+1}=f(v_n)$.
Dans **Fenêtre**, *choisir X et Y entre 0 et 1.*

2. Emettre des conjectures sur le comportement de la suite (v_n).

Travail de l'élève **4.** Soient les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n=\frac{1}{n}\qquad v_n=n^2-3\qquad w_n=(-1)^n$$

1. Etudier le sens de variation de chacune de ces suites.

2. Conjecturer graphiquement le « comportement à l'infini » de ces suites.

3. **a.** Déterminer un entier p tel que pour tout entier $n\geq p$, on ait $0\leq u_n\leq 10^{-6}$.

b. Peut-on faire de même en remplaçant 10^{-6} par n'importe quel réel $\varepsilon>0$?

4. **a.** Déterminer un entier p' tel que pour tout entier $n\geq p'$, on ait $v_n\geq 10^{10}$.

b. Peut-on faire de même en remplaçant 10^{10} par n'importe quel réel M ?