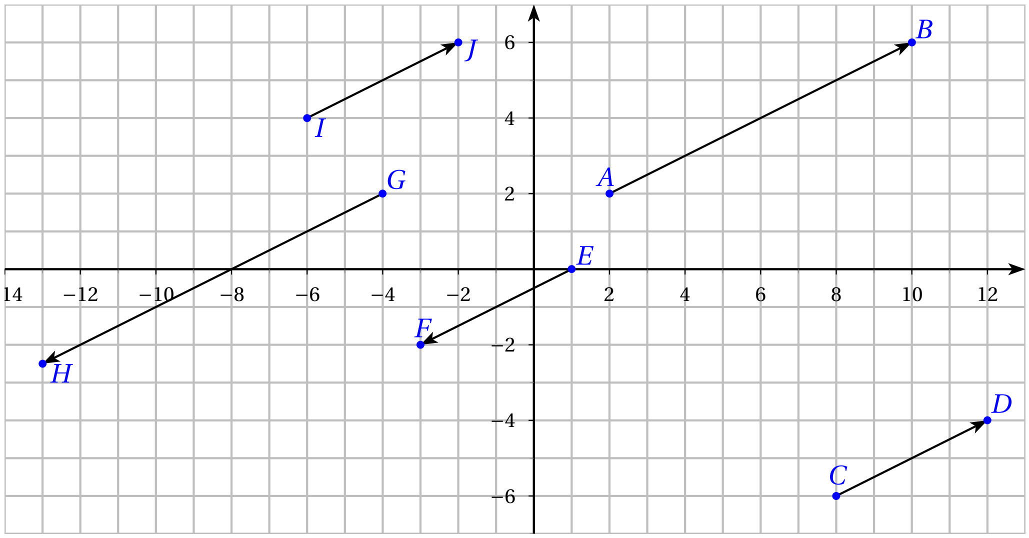
Travail de l'élève **1. Rappels et colinéarité**

Dans Géogébra, on a créé la figure suivante (montrée au vidéo-projecteur, la figure est distribuée aux élèves).



1. **Caractérisation de vecteurs**
   - **a.** Que possèdent en commun les vecteurs créés ?
   - **b.** Que possèdent en plus les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$?
     Et les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CD}$?
     Que dire des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{IJ}$?
     Quel quadrilatère est alors un parallélogramme ?
   - **c.** Quel mot traduit le fait que des vecteurs aient la même direction ?
     Regarder dans Géogébra la relation entre deux vecteurs de la figure de même direction.
   - **d.** Ecrire les égalités vectorielles qui existent entre $\overrightarrow{AB}$ et chacun des autres vecteurs.
2. **Coordonnées de vecteurs**
   - **a.** Que représente les coordonnées de chacun des vecteurs créés que Géogébra inscrit dans sa colonne de gauche ?
   - **b.** Comment peut-on les retrouver pour chaque vecteur à partir des coordonnées de ses points extrêmes ?
   - **c.** Ecrire sous la forme de système les égalités vectorielles de la question 1.d.
   - **d.** Que cela signifie-t-il sur les coordonnées des vecteurs ?
3. **Application**
   Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ? Si oui, préciser le coefficient de colinéarité :
   - **a.** $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\12\end{pmatrix}$
   - **b.** $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$
   - **c.** $\overrightarrow{Lolo}\begin{pmatrix}-12\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Néné}\begin{pmatrix}135\\-45\end{pmatrix}$
   - **d.** $\overrightarrow{Fabrice}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Clément}\begin{pmatrix}-2\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$
4. **Condition nécessaire et suffisante**
   On veut s'affranchir de la recherche du coefficient de colinéarité k et trouver un test numérique simple pour prouver la colinéarité de deux vecteurs.

   Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, dont on connait les coordonnées respectives $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

a. <u>Condition nécessaire</u> : on suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
Traduire ce que cela signifie à l'aide des coordonnées de ces vecteurs.
Montrer qu'en combinant les égalités obtenues, on obtient :
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $xy' - yx' = 0$.

b. <u>Condition suffisante</u> : on suppose que l'on a l'égalité $xy' - yx' = 0$.
Comme $\vec{u}$ est non nul, l'une de ses coordonnées est non nulle, par exemple son abscisse x. Posons alors $k = \dfrac{x'}{x}$ (si x est nul, on prendra alors $k = \dfrac{x}{x'}$ et la méthode restera la même).
Exprimer alors y' en fonction de y.
Que peut-on alors dire sur les coordonnées des deux vecteurs ? Conclure.

c. *Cas particulier* : Que peut-on dire du vecteur $\vec{0}$? Vérifier que la condition fonctionne aussi avec ce vecteur.

5. Application
Dire si les vecteurs suivants sont colinéaires, en utilisant la condition nécessaire et suffisante démontrée ci-dessus.

a. $\overrightarrow{Wanda}\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Nouki}\begin{pmatrix} 3.5 \\ -7.8 \end{pmatrix}$

b. $\overrightarrow{Ana}\begin{pmatrix} 6.4 \\ 3.1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Gui}\begin{pmatrix} 22.4 \\ 10.85 \end{pmatrix}$

c. $\overrightarrow{Dounia}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Nejema}\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 20 \end{pmatrix}$

***<u>Travail de l'élève</u>* 2. Décomposition de vecteur**

1. Lecture.
Dès lors que l'on choisit deux vecteurs non colinéaires du plan, on crée un moyen de repérer tous les autres vecteurs de ce plan : on a choisi une base.
On considère les deux figure suivantes :

Figure 1

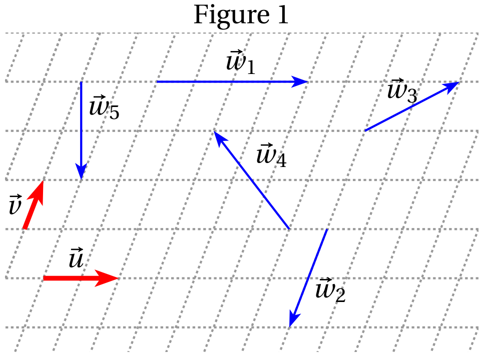
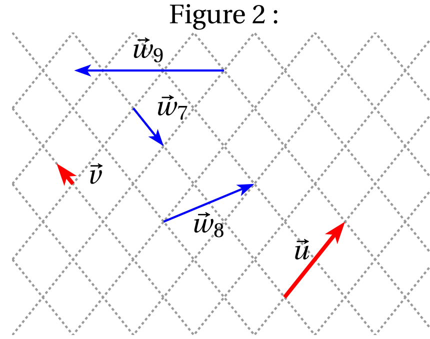


Figure 2 :



Ecrire chaque vecteur $\vec{w}_i$ sous la forme d'une somme vectorielle du type : $\vec{w}_i = \spadesuit\vec{u} + \clubsuit\vec{v}$ (où le coeur et le trèfle désignent des réels à déterminer).

2. Utilisation de la décomposition.

a. Construire un parallélogramme $ABCD$.
Placer les points I et J tels que $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}$.

b. On désire prouver l'alignement des points I, J et C à l'aide de relations vectorielles.

i. Exprimer $\overrightarrow{AC}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right)$ et montrer que $\overrightarrow{AI} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}$.

ii. En déduire l'expression des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right)$.

iii. En comparant les deux composition obtenues, prouver que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires. Conclure.