EXERCICES : SUR TOUT LE PROGRAMME

ANTILLES-GUYANE (SEPT 2010) : Fonctions et intégrales **6 points**

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{x}.$$

Le but du problème est l'étude de cette fonction et le calcul d'une aire.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 3 cm.

I - Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 1 - \ln x.$$

1. Etudier les variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. En déduire le signe de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

II - Etude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative $\mathscr{C}$

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?
2. Déterminer la limite en $+\infty$ de f puis montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$.
4. En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Déterminer le point A de la courbe $\mathscr{C}$ en lequel la tangente $\mathscr{T}$ est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.
6. Dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ tracer les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{T}$ et la courbe $\mathscr{C}$.

III - Calcul d'une aire

1. Montrer que $\displaystyle\int_1^{\text{e}} \frac{\ln x}{x}\,\text{d}x = \frac{1}{2}$.
2. En déduire l'aire de la région du plan délimitée par les droites d'équation $x = 1$, $x = \text{e}$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$. On exprimera cette aire en cm^2. Hachurer cette région sur le graphique.

ANTILLES-GUYANE (SEPT 2010) : Vrai-Faux de géométrie **4 points**

L'exercice comporte quatre propositions indépendantes.
Indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse choisie.

1. L'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, vérifiant $|z-2| = |z-2\text{i}|$ est la droite d'équation $y = x$.
2. Si A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes a, b et c vérifiant $\dfrac{b-a}{c-a} = -3$ alors A, B et C sont alignés.

3. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
La droite de l'espace passant par le point B de coordonnées (2 ; 3 ; 4) et admettant le vecteur $\vec{u}$ (1 ; 2 ; 3) comme vecteur directeur a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t+1 \\ y & = & 2t+1 \\ z & = & 3t+1 \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
La sphère de centre A(1 ; 1 ; 1) et de rayon 10 est tangente au plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+y+z-1=0$.

ANTILLES-GUYANE (SEPT 2010) : Suites arithmétiques, géométriques — 5 points

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0=-1,\ u_1=\frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$.

- **a.** Calculer v_0.
- **b.** Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
- **c.** En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
- **d.** Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n=\frac{u_n}{v_n}$

- **a.** Calculer w_0.
- **b.** En utilisant l'égalité $u_{n+1}=v_n+\frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
- **c.** En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1}=w_n+2$.
- **d.** Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n=\frac{2n-1}{2^n}$.

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n} u_k=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n=2-\frac{2n+3}{2^n}$.

ANTILLES-GUYANE (SEPT 2010) : Probabilités conditionnelles, loi binomiale — 4 points

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.
On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;

- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note :

M l'événement : « l'animal est porteur de la maladie » ;

T l'événement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
   a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
   b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est $0,058$.
3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?
4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?
5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

   D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

   a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
   b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

POLYNÉSIE (SEPT 2010) : Vrai-Faux sur suites et intégrales **3 points**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$t_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

   Proposition 1 : Pour tout entier naturel n, $t_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \leqslant w_n \leqslant v_n.$$

   Proposition 2 : Si les suites (u_n)et (v_n) sont adjacentes alors la suite (w_n) est convergente.

3. Soient f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0\,;1]$.

Proposition 3 : Si $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ alors $f = g$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.

AMÉRIQUE DU SUD (NOV 2010) : Probabilités conditionnelles, test **5 points**

Un internaute souhaite faire un achat par l'intermédiaire d'internet. Quatre sites de vente, un français, un allemand, un canadien et un indien présentent le matériel qu'il souhaite acquérir. L'expérience a montré que la probabilité qu'il utilise chacun de ces sites vérifie les conditions suivantes (les initiales des pays désignent les événements « l'achat s'effectue dans le pays ») :

$$P(F) = P(A), \quad P(F) = \frac{1}{2}P(C) \quad \text{et} \;\; P(C) = P(I).$$

1. Calculer les quatre probabilités $P(F)$, $P(A)$, $P(C)$ et $P(I)$.
2. Sur chacun des quatre sites, l'internaute peut acheter un supplément pour son matériel. Ses expériences précédentes conduisent à formuler ainsi les probabilités conditionnelles de cet événement, noté S :

$$P_F(S) = 0,2 \quad ; \quad P_A(S) = 0,5 \quad ; \quad P_C(S) = 0,1 \quad ; \quad P_I(S) = 0,4$$

   a. Déterminer $P(S \cap A)$.

   b. Montrer que $p(S) = \dfrac{17}{60}$.

   c. L'internaute a finalement acheté un supplément. Déterminer la probabilité qu'il l'ait acheté sur le site canadien.

3. Sur 1 000 internautes ayant acheté ce matériel, on a établi la statistique suivante :

	Sites européens	Site canadien	Site indien
Effectif d'acheteurs	335	310	355

   a. On note respectivement f_1, f_2 et f_3 les fréquences associées aux effectifs précédents. On pose :

   $d^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=3}\left(f_k - \frac{1}{3}\right)^2$. Calculer d^2 puis $1\,000d^2$.

   b. On simule 3 000 fois l'expérience consistant à tirer un nombre au hasard parmi $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$ avec équiprobabilité. Pour chacune de ces simulations on obtient une valeur de $1\,000d^2$. Voici les résultats :

Minimum	Premier décile	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Neuvième décile	Maximum
0,000 5	0,076 3	0,211 1	0,488 45	0,940 1	1,510 4	5,925 6

   Au risque 10 %, peut-on considérer que le choix d'un site européen, nord-américain ou asiatique se fait de manière équiprobable ?

NOUVELLE-CALÉDONIE (NOV 2010) : Fonctions et intégrales **6 points**

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

1. **a.** Etudier le sens de variation de la fonction φ sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

   b. Calculer $\varphi(\mathrm{e})$. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

   c. Déterminer le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}.$$

   On note f' la fonction dérivée de f.

   a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \geqslant 1$ on a : $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}$.

   b. Déduire de la question 1. le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

   c. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ on a :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln x}{x^2}.$$

   d. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. **a.** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$.

   b. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f, dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
   Soit $\mathscr{A}$ l'aire exprimée en cm^2 du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
   Déterminer un encadrement de $\mathscr{A}$.

NOUVELLE-CALÉDONIE (MARS 2011) : Equation différentielles **5 points**

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$10v'(t) + v(t) = 30.$$

Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$.

1. Démontrer que $v(t) = 30\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right)$.

2. **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

b. Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.

3. On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à 0,1 m.s^{-2}. Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.

4. La distance d parcourue par ce cycliste entre les instants t_1, et t_2 est donnée par $d = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$.

Calculer la distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes.

NOUVELLE-CALÉDONIE (MARS 2011) : Suites convergentes — 5 points

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

2. Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
En déduire que si $x \in [0\,;\,1]$ alors $f(x) \in [0\,;\,1]$.

Partie B

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0\,;\,1]$.

2. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

AMÉRIQUE DU NORD (MAI 2011) : PROBABILITÉS CONTINUES — 4 points

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.
On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle.
Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ?

Partie B

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à t années, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par : $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer λ sachant que $p(X > 5) = 0,4$.

2. Dans cette question, on prendra $\lambda = 0,18$.
Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?

3. Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0,4$.
   a. On considère un lot de 10 ordinateurs.
   Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.
   b. Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'événement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à $0,999$?

AMÉRIQUE DU NORD (MAI 2011) : Fonctions, intégrales et suites **6 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1.$$

1. Etudier les variations de la fonction g.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^x - x > 1$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}.$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe.
Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.
On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\,;\,1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
   a. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.
   b. Etudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathscr{C})$ sur $[0\,;\,1]$.
3. a. Déterminer une primitive de f sur $[0\,;\,1]$.
   b. Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

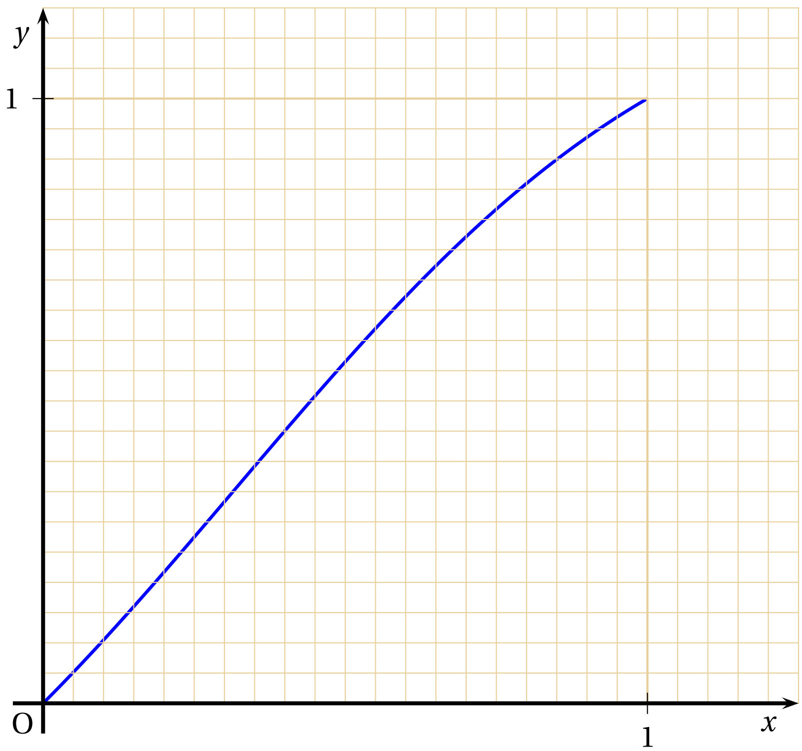
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & f(u_n), \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve



Amérique du Sud (nov 2009) : Fonctions et intégrales **6 points**

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{2-x}\right) dx$$

1. **a.** Étudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto f(x) = \frac{e^{-x}}{2-x}$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

   b. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$, on a $\frac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

2. Soit J et K les intégrales définies par $J = \int_0^1 (2+x)e^{-x} dx$ et $K = \int_0^1 x^2 f(x) dx$.

   a. Au moyen d'une intégration par parties, prouver que $J = 3 - \frac{4}{e}$.

   b. Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que $\frac{1}{3e} \leqslant K \leqslant \frac{1}{6}$.

   c. Démontrer que $J + K = 4I$.

   d. Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I, puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I.