<u>QUESTION de COURS (ROC)</u>
<u>pour l'épreuve écrite du BAC S</u>

A l'attention du lecteur…

- Cette liste est **non exhaustive** et certaines autres démos de cours peuvent apparaître.
- Toujours penser à bien suivre les prérequis donnés par l'énoncé (qui ne sont pas nécessairement ceux donnés en classe pour des raisons de progression du cours)…

L'auteur fournit une cote d'amour (qui n'engage que lui !) des démonstrations de théorèmes à connaître ou à maîtriser.

♥ ROC peu vraisemblable : il suffit d'avoir compris le principe

♥♥ ROC vraisemblable : il faut bien maîtriser le principe et savoir retrouver la méthode

♥♥♥ ROC probable : démonstration à savoir faire les yeux fermés et les mains attachés dans le dos…

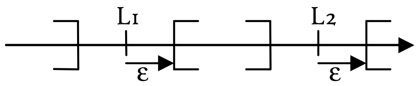
Suites :

ROC 1 : Unicité de la limite d'une suite ♥♥

Prérequis : définition de la limite finie d'une suite
Proposition **: Si la suite (u_n) a une limite finie L, alors cette limite L est unique.**

Démo : Par l'absurde

Supposons que la suite (u_n) admette deux limites distinctes L1 et L2 avec L1 < L2.



On choisit un rayon ε suffisamment petit pour que les intervalles $I_1 =]L_1 - \varepsilon; L_1 + \varepsilon[$ et $I_2 =]L_2 - \varepsilon; L_2 + \varepsilon[$ soient disjoints (i.e. leur intersection est vide).

La suite (u_n) tend vers L1 donc à partir d'un certain rang N1, tous les termes u_n sont dans I_1.

La suite (u_n) tend vers L2 donc à partir d'un certain rang N2, tous les termes u_n sont dans I_2.

Donc pour n supérieur à la fois à N1 et N2, u_n est à la fois dans I_1 et dans I_2, ce qui impossible.

Ce qui prouve que la limite est unique.

ROC 2 ♥♥

Prérequis : définition de la limite infinie d'une suite, d'une suite croissante, d'une suite majorée
Proposition **: Si une suite est croissante et non majorée alors elle diverge vers $+\infty$**

Démo : Soit (u_n) une suite croissante et non majorée.

(u_n) n'est pas majorée donc pour tout $A > 0$, il existe n_0 tel que $u_{n_0} > A$.

Or (u_n) est croissante donc pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0} > A$.

Donc pour tout $A > 0$, il existe un rang n_0 tel que $u_n > A$ pour tout $n \geq n_0$: c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

ROC 3 ♥

Prérequis : définition de la limite finie d'une suite
Théorème **: Soit (u_n) une suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$; si (u_n) converge vers L et si f est une fonction continue en L, alors $L = f(L)$.**

Démo : Si (u_n) converge vers L alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = L$ et si f est continue en L alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(L)$.

Par passage à la limite dans les deux membres de l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, il vient L= $f(L)$.

ROC 4 : Convergence des suites adjacentes ♥♥♥

Prérequis : (i) définition de deux suites adjacentes ((u_n) ↗, (v_n) ↘ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$).

(ii) toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge.

Théorème **: Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.**

Démo : Soit $w_n = v_n - u_n$; on étudie les variations de la suite (w_n) :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - u_{n+1} - v_n + u_n = \underbrace{(v_{n+1} - v_n)}_{\leq 0 \ car \ (v_n) \searrow} - \underbrace{(u_{n+1} - u_n)}_{\geq 0 \ car \ (u_n) \nearrow}$ donc $w_{n+1} - w_n \leq 0$.

La suite (w_n) est donc décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$: donc tous les w_n sont positifs et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq u_n$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{De plus, } (u_n) \text{ est croissante donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n. \\ \text{De plus, } (v_n) \text{ est décroissante donc, } \forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq v_0 \end{array}\right\} \quad \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$$

Finalement, (u_n) est croissante et majorée par v_0, donc (u_n) converge.

De même, (v_n) est décroissante et minorée par u_0 donc (v_n) converge.

Enfin, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$. CQFD

A noter que les démonstrations du théorème des gendarmes et de comparaison pour les suites sont très semblables à celles fournies pour leurs équivalents pour les fonctions (voir page suivante).

Généralités sur les fonctions :

ROC 5 : Théorème de comparaison (à savoir adapter aux suites) ♥♥♥

Prérequis : définition de la limite infinie d'une fonction

Théorème **: Soient f et g deux fonctions vérifiant sur un intervalle $[m;+\infty[$, $f(x) \le g(x)$.**

- **Si** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **, alors** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- **Si** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ **, alors** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Démo (du premier point) :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: d'après la définition de la limite, pour tout $A > 0$, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand, c'est-à-dire pour tout $x \ge N$.

Pour tout $x \ge m$, on a de plus $f(x) \le g(x)$: donc pour x assez grand, c'est-à-dire pour tout $x \ge Max(N;m)$, $A < f(x) \le g(x)$

Donc pour tout $x \ge Max(N;m)$, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $g(x)$, c'est-à-dire d'après la définition, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

ROC 6 : Théorème des gendarmes (à savoir adapter aux suites) ♥♥

Prérequis : définition de la limite finie d'une fonction

Théorème des gendarmes **(en $+\infty$): Soient f, g et h trois fonctions vérifiant sur un intervalle $[m;+\infty[$, $f(x) \le g(x) \le h(x)$.**

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L$ ($L \in \mathbb{R}$) alors g a une limite en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L$.

Démo : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$: d'après la définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand, c'est-à-dire pour tout $x > A$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L$: d'après la définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$ contient toutes les valeurs de $h(x)$ pour x assez grand, c'est-à-dire pour tout $x > B$.

Pour tout $x > Max(A;B;m)$, on a donc $L-\varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) \le L+\varepsilon$.

Donc pour x assez grand, l'intervalle $]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$ contient toutes les valeurs de $g(x)$, c'est-à-dire d'après la définition, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L$. CQFD

ROC 7 ♥♥♥

Prérequis : définition d'une fonction continue et d'une fonction dérivable en a

Proposition **: (i) La fonction partie entière n'est pas continue en 1.**

(ii) La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Démo : (i) Pour tout $x \in [0;1[$, $E(x) = 0$ et pour tout $x \in [1;2[$, $E(x) = 1$. Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} E(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} E(x) = 1$: les limites à droite et à gauche de 1 sont différentes donc la fonction partie entière n'a pas de limite en 1. Elle n'est donc pas continue en 1.

(ii) Le taux de variations de la fonction valeur absolue entre 0 et h est :

pour $h > 0$, $(|h| - |0|)/(h-0) = h/h = 1$

pour $h < 0$, $(|h| - |0|)/(h-0) = -h/h = -1$

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{|h|}{h} \ne \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{|h|}{h}$: le taux de variations de la fonction valeur absolue n'a pas de limite en 0.

La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0.

ROC 8 ♥♥

<u>Prérequis</u> : définition d'une fonction continue et d'une fonction dérivable en a

<u>Proposition</u> **: Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.**

<u>Démo</u> : (en $a \in I$) f est dérivable en a donc $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

Donc sur un petit intervalle centré en a, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)+\varepsilon(x)$, où $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Alors $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$, où $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

$\lim\limits_{x \to a} f'(a)(x-a) = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x)(x-a) = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ce qui est la définition de la continuité de f en a. CQFD

ROC 9 ♥♥

<u>Prérequis</u> : définition d'une fonction dérivable en a

<u>Proposition</u> **:** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

<u>Démo</u> : $\forall x \neq 0, \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$: on reconnaît le taux de variations de la fonction sinus entre 0 et x. La fonction sinus est dérivable en 0 donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$

$\forall x \neq 0, \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0}$: on reconnaît le taux de variations de la fonction exp. entre 0 et x.

La fonction exponentielle est dérivable en 0 donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = e^0 = 1$

Nombres Complexes :

ROC 10 : Propriété du conjugué ♥♥

Prérequis : définition des parties réelles, imaginaires et du conjugué d'un nombre complexe

Proposition **: Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes;**

(i) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ **et** $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$ **(ii)** $z\overline{z} = a^2 + b^2$ **(iii)** $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

(iv) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ **(v) Si** $z' \neq 0$, $\overline{(z/z')} = \overline{z}/\overline{z'}$ **(vi)** $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$ **et** $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

Démo : (*de certains points*)

(i) Soit $z = a + ib$; $\overline{z} = a - ib$ donc $z + \overline{z} = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2ib = 2i\operatorname{Im}(z)$.

(ii) $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$

(iii) $\overline{z + z'} = \overline{(a + a') + i(b + b')} = (a + a') - i(b + b')$ et $\overline{z} + \overline{z'} = \overline{(a + ib)} + \overline{(a' + ib')} = (a + a') - i(b + b')$ ...

(iv) $\overline{z \times z'} = \overline{(aa' - bb') + i(a'b + ab')} = (aa' - bb') - i(a'b + ab')$ et $\overline{z} \times \overline{z'} = \overline{(a + ib)} \times \overline{(a' + ib')} = (aa' - bb') - i(a'b + ab')$

ROC 11 : Propriété du module et de l'argument ♥♥

Prérequis : définition du module et d'un argument d'un nombre complexe

Proposition **: Soient z et z' deux nombres complexes;**

(i) $z.\overline{z} = |z|^2$ **(ii)** $|-z| = |z|$ **(iii)** $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ **(iv)** $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ **(inég. triang.)**

(v) égalité : $z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ **et** $\arg(z) = \arg(z')\ (2\pi)$

(vi) conjugué : $|\overline{z}| = |z|$ **et** $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ (2\pi)$

Démo : (i) et (v) immédiates (ii) $|-z| = |-a - ib| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

(iii) Si $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0$ alors $a^2 + b^2 = 0$ et nécessairement $a = b = 0$ donc $z = a + ib = 0$.

(iv) $MM' \leq OM + OM'$ donc en terme d'affixes $|z' - z| \leq |z| + |z'|$. On remplace ensuite z par $-z$.

(vi) Soit $z = a + ib$ un complexe. Son conjugué $\overline{z} = a - ib$ a pour module $|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

Soit $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ la forme trigonométrique de z.

Alors $\overline{z} = \overline{|z|}\overline{(\cos\theta + i\sin\theta)} = |z|(\cos\theta - i\sin\theta) = |z|(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$.

Donc un argument de $\overline{z}$ est $-\theta = -\arg(z)$. D'où $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ (2\pi)$.

ROC 12 : Module et de l'argument du produit ♥♥♥

Prérequis : Notation trigonométrique d'un nombre complexe et cosinus et sinus d'une somme

Proposition **: Si z_1 et z_2 sont $\neq 0$, alors** $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ **et** $\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)\ (2\pi)$

Démo : Soient $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ deux nombres complexes non nuls, avec $|z_1| = r_1, \arg(z_1) = \theta_1\ (2\pi)$ et $|z_2| = r_2, \arg(z_2) = \theta_2\ (2\pi)$.

Alors $Z = z_1 \times z_2 = r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

$$= r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2)$$

$$= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Donc $|Z| = |z_1 \times z_2| = r_1 r_2 = |z_1| \times |z_2|$ et $\arg(Z) = \arg(z_1 \times z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2)\ (2\pi)$.

Roc 13 : Module et de l'argument de l'inverse ♥♥♥

Prérequis : Notation trigonométrique d'un nombre complexe

Proposition **: Si z est non nul, alors** $|1/z| = 1/|z|$ **et** $\arg(1/z) = -\arg(z)\ (2\pi)$

Démo : On considère maintenant $Z = \dfrac{1}{z}$ où $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$, avec $|z| = r, \arg(z) = \theta\ (2\pi)$

$$Z = \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{r} \times \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{1}{r} \times (\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{1}{r} \times (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

Donc $|Z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{|z|}$ et $\arg(Z) = \arg(\dfrac{1}{z}) = -\theta = -\arg(z)\ (2\pi)$

Roc 14 : Module et de l'argument du quotient ♥♥♥

Prérequis : (i) Notation trigonométrique d'un nombre complexe
(ii) Module et argument du produit et l'inverse

Proposition **: Si z_1 et z_2 sont $\neq 0$, alors $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ et $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)\ (2\pi)$**

Démo : On considère enfin $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$. Alors $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 \times \dfrac{1}{z_2}\right| = |z_1| \times \left|\dfrac{1}{z_2}\right| = |z_1| \times \dfrac{1}{|z_2|} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

Alors $\arg(\dfrac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1 \times \dfrac{1}{z_2}) = \arg(z_1) + \arg(\dfrac{1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)\ (2\pi)$

Roc 15 : Géométrie ♥

Prérequis : (i) Notation trigonométrique d'un nombre complexe
(ii) Module et argument du produit et l'inverse

Proposition **: Soient z_A, z_B et z_C les affixes des trois points A, B et C.**

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{AB}{AC} \text{ et } \arg(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) = (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$$

Démo : $\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \dfrac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \dfrac{AB}{AC}$ et

$$\arg(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) = \arg(z_B - z_A) - \arg(z_C - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AC}) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AC}; \vec{u}) = (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})\ \ (2\pi)$$

Roc 16 : Ecriture complexe de l'homothétie ♥♥

Prérequis : (i) Affixe d'un vecteur
(ii) définition d'une homothétie

Proposition **: $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ si et seulement si $(z' - \omega) = k(z - \omega)$.**

Démo : On traduit une égalité vectorielle en termes d'affixes...

M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k $\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow (z' - \omega) = k(z - \omega)$

Roc 17: Ecriture complexe de la rotation ♥♥♥

Prérequis : (i) Affixe d'un vecteur
(ii) définition d'une rotation

Proposition **: $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ si et seulement si $(z' - \omega) = e^{i\theta}(z - \omega)$.**

Démo :
On traduit une égalité de longueur et une égalité d'angle en termes d'affixes... Avec un schéma

M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta\ (2\pi) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}) = \theta\ (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta} \Leftrightarrow (z' - \omega) = e^{i\theta}(z - \omega)$$

Equa diff et exponentielle :

Roc 18 ♥♥

Prérequis : (i) La fonction exp. est solution de l'équa. diff. $y' = y$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 1$.
(ii) Théorème des valeurs intermédiaires.
(iii) Une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle.
Propriété **: (i)** $\forall x \in \mathbb{R}, exp(x)exp(-x) = 1$**, c'est-à-dire** $exp(-x) = 1/exp(x)$
(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, exp(x) > 0$

Démo : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = exp(x)exp(-x)$.
(i) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Sachant que $exp'(x) = exp(x)$, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} f'(x) &= exp'(x)exp(-x) + exp(x) \times [exp(-x)]' \\ &= exp(x)exp(-x) + exp(x) \times [-exp(-x)] = 0 \end{aligned}$$

Donc f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Or $f(0) = exp(0)exp(-0) = 1$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = exp(x)exp(-x) = 1$.

(ii) • La fonction exp. ne s'annule pas sinon f s'annulerait également (impossible vu que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1$).
• La fonction exponentielle est de plus de signe constant :
Sinon, il existerait a et b réels tels que $exp(a) < 0$ et $exp(b) > 0$. Vu que exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $[a;b]$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous donnerait alors au moins une solution à l'équation $exp(x) = 0$ sur $[a;b]$, ce qui est impossible puisque la fonction exponentielle ne s'annule pas.
• Le signe de la fonction exponentielle est enfin strictement positif puisque $exp(0) = 1 > 0$.

ROC 19 : Unicité de la solution de $y' = y$ avec $y(0) = 1$ ♥♥♥

Prérequis : Existence de la fonction exp. comme solution de $y' = y$ avec $y(0) = 1$.
Théorème **: La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle $y' = y$ avec $y(0) = 1$ (condition initiale).**

Démo de l'unicité :
Supposons qu'une fonction g vérifie $g' = g$ sur $\mathbb{R}$ et $g(0) = 1$.
La fonction $\frac{g}{exp}$ est définie sur $\mathbb{R}$, puisque la fonction exponentielle ne s'annule pas, et est même dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Alors $(\frac{g}{exp})' = \frac{g' \times exp - g \times exp'}{exp^2} = 0$ puisque $g' = g$ et $exp' = exp$.
La fonction g/exp est donc constante ; comme $\frac{g}{exp}(0) = \frac{g(0)}{exp(0)} = \frac{1}{1} = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}, \frac{g(x)}{exp(x)} = 1$.
C'est-à-dire $g = exp$. D'où l'unicité.

ROC 20 ♥♥♥

Prérequis : (i) La fonction exp. est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = y$ avec $y(0) = 1$.
(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = 1/\exp(x)$
Théorème **: La fonction exponentielle transforme une somme en produit, c'est-à-dire**
$\forall x, y \in \mathbb{R}, exp(x + y) = exp(x) \times exp(y)$.

Démo : Soient y un réel fixé et h_y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_y(x) = exp(x + y)exp(-x)$.
La fonction h_y est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} h_y'(x) &= [exp(x + y)]'exp(-x) + exp(x + y) \times [exp(-x)]' \\ &= exp(x + y)exp(-x) + exp(x + y) \times [-exp(-x)] = 0 \end{aligned}$$

Donc h_y est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Or $h_y(0) = exp(0 + y)exp(-0) = exp(y)$. Donc $\forall x, y \in \mathbb{R}, exp(x + y)exp(-x) = exp(y)$.
Vu que $\forall x \in \mathbb{R}, exp(-x) = 1/exp(x)$, alors $\forall x, y \in \mathbb{R}, exp(x + y) = exp(x)exp(y)$.

ROC 21 ♥♥

Prérequis : $\forall x, y \in \mathbb{R}, exp(x+y) = exp(x) \times exp(y)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = 1/\exp(x)$.

Proposition **: (i)** $\forall x, y \in \mathbb{R}, exp(x-y) = exp(x)/exp(y)$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, exp(nx) = exp(x)^n$

Démo : (i) $\forall x, y \in \mathbb{R}, exp(x-y) = exp(x+(-y)) = exp(x) \times exp(-y) = exp(x)/exp(y)$

(ii) Par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n : "\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x)^n = \exp(nx)"$.

Initialisation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x)^0 = 1 = \exp(0) = \exp(0x)$ donc P_0 est vérifiée.

Hérédité : On suppose que P_k est vraie pour un certain entier k, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x)^k = \exp(kx)$.

Montrons que P_{k+1} est vraie :

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x)^{k+1} = \exp(x)^k \exp(x) = \exp(kx)\exp(x) = \exp(kx+x) = \exp((k+1)x)$.

Conclusion : Donc pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie.

ROC 22 : Limites de la fonction exponentielle ♥♥♥

Prérequis : (i) dérivées et variations de la fonction exponentielle.
(ii) théorème de comparaison des limites
(iii) composition des limites

Proposition **:** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Démo : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - (x+1)$ (*cette fonction serait donnée...*)

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x - 1$. Donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0;+\infty[$.

La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$: elle admet donc un minimum en 0 de $f(0) = e^0 - (0+1) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ et $e^x \geq x+1$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = 1/e^{-x}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty \end{array}\right\} \text{ Donc } \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$$

ROC 23 : Limites fondamentales (croissances comparées) ♥♥♥

Prérequis : (i) dérivées et variations de la fonction exponentielle.
(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x+1$
(iii) théorème de comparaison des limites
(iv) composition des limites

Proposition **:** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

Démo : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x - x$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x+1$ et $f'(x) \geq 0$.

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = e^0 - 0^2/2 = 1$ pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$.

Ainsi, $\forall x > 0$, $e^x > \frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, d'après le théo. de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Pour tout $x < 0$, $xe^x = \frac{x}{e^{-x}} = -\frac{-x}{e^{-x}} = -\frac{1}{e^{-x}/(-x)}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} e^X / X = +\infty \end{array}\right\} \text{ Donc } \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{e^{-x}/(-x)} = 0$$

ROC 24 : Autres équations différentielles ♥♥

<u>Prérequis</u> : dérivées de la fonction exponentielle
<u>Théorème</u> **: Soient $a \neq 0$, x_0 et y_0 trois réels ; les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont définies par $f(x) = ke^{ax}$. Avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$, alors la solution est unique.**

<u>Démo</u> :

- Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est une constante est solution de l'équation différentielle (E), car $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = C \times ae^{ax} = af(x)$.
- Soit g une fonction solution de (E). On pose h la fonction définie par $h(x) = g(x)e^{-ax}$.
  h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
  Pour tout réel x, $h'(x) = g'(x)e^{-ax} + g(x)(e^{ax})'$.
  Comme g est solution de (E), on a $g'(x) = ag(x)$ et $h'(x) = ag(x)e^{-ax} + g(x) \times (-ae^{-ax}) = 0$.
  Donc h est une fonction constante : pour tout réel x, $h(x) = C$.
  Donc $g(x)e^{-ax} = C$, c'est-à-dire $g(x) = Ce^{ax}$. CQFD

La condition initiale fixe bien entendu la constante k.

<u>Logarithmes</u> :

ROC 25 ♥

Prérequis : (i) Variations et limites de la fonction exponentielle
(ii) Théorème des valeurs intermédiaires et corollaire.
<u>Proposition</u> **: Pour tout $y > 0$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $e^x = y$ (et on note $x = \ln y$).**

<u>Démo</u> : La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. Donc $\forall y > 0$, d'après le corollaire du TVI, il existe un unique antécédent $x \in \mathbb{R}$ tel que $e^x = y$.

ROC 26 : propriétés algébriques de la fonction ln ♥♥

Prérequis : (i) Définition de la fonction ln comme réciproque de la fonction exponentielle
(ii) Propriétés algébriques de la fonction exponentielle
<u>Proposition</u> **: Soient a et b deux réels strictement positifs;**
(i) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ **(ii)** $\ln(1/b) = -\ln b$ **et** $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$
(iii) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ln a^n = n \ln a$ **(iv)** $\ln \sqrt{a} = (\ln a)/2$

<u>Démo</u> : ASTUCE tout transformer avec des exponentielles et se rappeler que $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
Pour tous a et b réels strictement positifs...
(i) $e^{\ln(ab)} = ab$ et $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = a \times b$: donc $e^{\ln(ab)} = e^{\ln a + \ln b} \Leftrightarrow \ln(ab) = \ln a + \ln b$.
(ii) $e^{\ln(1/b)} = 1/b$ et $e^{-\ln b} = 1/e^{\ln b} = 1/b$: donc $e^{\ln(1/b)} = e^{-\ln b} \Leftrightarrow \ln(1/b) = -\ln b$.
$\ln(a/b) = \ln(a \times (1/b)) = \ln a + \ln(1/b) = \ln a - \ln b$.
(iii) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $e^{\ln a^n} = a^n$ et $e^{n \ln a} = (e^{\ln a})^n = a^n$: donc $e^{\ln a^n} = e^{n \ln a} \Leftrightarrow \ln a^n = n \ln a$.
(iv) $e^{2\ln\sqrt{a}} = (e^{\ln\sqrt{a}})^2 = (\sqrt{a})^2 = a$ et $e^{\ln a} = a$: donc $e^{2\ln\sqrt{a}} = e^{\ln a} \Leftrightarrow 2\ln\sqrt{a} = \ln a$.

Comme pour les fonctions exponentielles, la démonstration peut être basée sur le principe suivant : "Une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante".

ROC 27 : propriétés algébriques de la fonction ln ♥

Prérequis : Dérivée de la fonction exponentielle et d'une composée
***Proposition* : La fonction $\ln$ est dérivable (donc continue) sur $]0;+\infty[$ et $\forall x>0$, $(\ln x)'=1/x$.**
La fonction $\ln$ est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Démo : $\forall x>0,\ e^{\ln x}=x$. On dérive les deux membres de cette égalité.
Alors $\forall x>0$, $(e^{\ln x})'=(\ln x)'\times\exp'(\ln x)=(\ln x)'\times e^{\ln x}=(\ln x)'\times x=(x)'=1$: donc $(\ln x)'=1/x$.
Vu que $1/x>0$, la fonction $\ln$ est strict. croissante sur $]0;+\infty[$.

ROC 28 : limites de la fonction ln ♥

Prérequis : (i) Limites de la fonction exponentielle et composée de limites.
(ii) Propriétés algébriques de la fonction ln
***Proposition* : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$**

Démo : $\ln x>A\Leftrightarrow x>e^A$: donc pour tout $\forall A\in\mathbb{R}$, il existe $x_0=e^A$ tq $\ln x>A$ pour tout $x>x_0$.
Ce qui est la définition de la limite infinie : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

$\forall x>0,\ \ln x=-\ln(1/x)$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}1/x=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}-\ln(1/x)=-\infty$.

ROC 29 : Limites fondamentales et croissances comparées ♥♥

Prérequis : (i) limites fondamentales sur la fonction exponentielle et limites de la fonction $\ln$
(ii) composée de limites
***Proposition* : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$**

Démo :

Pour tout $x>1$, $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln x}{e^{\ln x}}=\dfrac{1}{e^{\ln x}/\ln x}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}e^X/X=+\infty\end{array}\right\}\quad\text{Donc }\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\ln x}}{\ln x}=+\infty\text{ et }\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\ln x}/\ln x}=0$$

Pour tout $x>0$, $x\ln x=e^{\ln x}\times\ln x$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty}Xe^X=0\end{array}\right\}\quad\text{Donc }\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln x=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}e^{\ln x}\times\ln x=0$$

Probabilités :

ROC 30 : Combinaisons ♥

Prérequis : le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est $\dbinom{n}{p}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

***Proposition* : Soit n un entier naturel et p un entier inférieur ou égal à n ; alors $\dbinom{n}{p}=\dbinom{n}{n-p}$.**

Démo : D'après la définition, $\dbinom{n}{n-p}=\dfrac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!}=\dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}=\dbinom{n}{p}$.

ROC 30 : Formule pour le triangle de PASCAL ♥♥

Prérequis : le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est $\binom{n}{p}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Proposition **: Soit n un entier naturel et p tel que $1\leq p\leq n-1$; alors $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p}$.**

Démo : Pour $1\leq p\leq n-1$,

$$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!}+\frac{(n-1)!}{p!((n-1)-p)!}=\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!}\times\left[\frac{1}{n-p}+\frac{1}{p}\right]$$

$$=\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!}\times\frac{p+n-p}{p(n-p)}=\frac{(n-1)!\times n}{(p-1)!\times p\times(n-p-1)!\times(n-p)}=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\binom{n}{p}$$

ROC 31 : Loi uniforme continue et espérance ♥

Prérequis : (i) Définition de la loi uniforme continue

(ii) Définition de l'espérance pour une V.A. suivant une loi continue de densité f

Proposition **: Soit X une V.A. suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$. La probabilité que la valeur prise par X soit dans l'intervalle $[\alpha;\beta]$, inclus dans $[a;b]$, est $P([\alpha;\beta])=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$ et l'espérance de la V.A. X est $E(X)=(a+b)/2$.**

Démo : La fonction densité est la fonction f définie sur $[a;b]$ par $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$.

Donc $P([\alpha;\beta])=\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}[x]_\alpha^\beta=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$.

De plus, $E(X)=\int_a^b xf(x)dx=\int_a^b x\times\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b=\frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{b+a}{2}$

ROC 32 : Loi exponentielle continue ♥

Prérequis : Définition de la loi exponentielle de paramètre λ

Proposition **: Soit X une V.A. suivant la loi exponentielle de paramètre λ. La probabilité que la valeur prise par X soit dans l'intervalle $[\alpha;\beta]$, inclus dans $\mathbb{R}^+$, est $P([\alpha;\beta])=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}$.**

Démo : La fonction densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $(\lambda>0)$.

Donc $P([\alpha;\beta])=\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta \lambda e^{-\lambda x}dx=[-e^{-\lambda x}]_\alpha^\beta=-e^{-\lambda\beta}+e^{-\lambda\alpha}$.

ROC 33 : Espérance de la loi exponentielle continue ♥

Prérequis : (i) Définition de la loi exponentielle de paramètre λ

(ii) Définition de l'espérance d'une V.A. X de densité f : $\int_I xf(x)dx$

(iii) Intégration par parties

Proposition **: Soit X une V.A. suivant la loi exponentielle de paramètre λ; alors $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$.**

Démo : On réalise une intégration par parties.

On pose $u'(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ et $v(x)=x$.

Alors $u(x)=-e^{-\lambda x}$ et $v'(x)=1$

$$\int_0^t x\lambda e^{-\lambda x}dx=[-xe^{-\lambda x}]_0^t-\int_0^t -e^{-\lambda x}dx=[-xe^{-\lambda x}]_0^t-\left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^t=-e^{-\lambda t}(1+\frac{t}{\lambda})+\frac{1}{\lambda}$$

$\lim\limits_{t\to+\infty} -e^{-\lambda t}(1+\frac{t}{\lambda})+\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}$ car $\lambda>0$. Donc $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$.

Intégrales :

ROC 34 : Comparaison d'intégrales ♥♥♥

Prérequis : (i) Linéarité de l'intégrale $\int_a^b [f(t)+g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

(ii) Si $f \geq 0$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$

Proposition **: Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$;**

Si $f \leq g$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

Démo : Si $f \leq g$ sur $[a;b]$, alors la fonction $g - f$ est positive et continue donc $0 \leq \int_a^b [g(t) - f(t)]dt$.

Ce qui, par linéarité donne $0 \leq \int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)dt \Leftrightarrow \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

ROC 35 : Inégalité de la moyenne ♥♥

Prérequis : (i) définition de l'intégrale d'une fonction continue

(ii) Si $f \leq g$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

Proposition **: Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et soit deux réels m et M tels que $\forall t \in [a;b], m \leq f(t) \leq M$; alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$**

Démo : $m \leq f \leq M$ sur $[a;b]$, où m, M sont deux fonctions constantes donc continues.

Alors $\int_a^b mdt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b Mdt \Leftrightarrow [mt]_a^b \leq \int_a^b f(t)dt \leq [Mt]_a^b \Leftrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$

ROC 36 : Unicité des primitives avec condition initiale ♥

Prérequis : (i) Définition et existence d'une primitive pour une fonction continue.

Proposition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $x_0 \in$;

(i) Deux primitives de f diffèrent d'une constante.

(ii) Il existe une unique primitive F de f vérifiant $F(x_0) = y_0$.

Démo: Soit F et G deux primitives de f sur I.

(i) On considère la fonction $\varphi = G - F$ qui est dérivable sur I en tant que somme de deux fonctions dérivables sur I . Alors $\varphi' = (G-F)' = G' - F' = f - f = 0$.

Donc la fonction $\varphi = G - F$ est une constante k sur I : ainsi $G = F + k$.

(ii) Soit G une primitive de f ; la fonction F définie sur I par $F(x) = G(x) - G(x_0) + y_0$ est la somme d'une primitive et d'une constante. C'est donc encore une primitive de f.

De plus, $F(x_0) = G(x_0) - G(x_0) + y_0 = y_0$ d'où l'existence d'une telle primitive.

Par ailleurs, si P est une autre primitive vérifiant la condition initiale, alors il existe une constante C telle que pour tout $x \in I$, $P(x) = F(x) + C$. Donc $P(x_0) = F(x_0) + C \Leftrightarrow y_0 = y_0 + C \Leftrightarrow C = 0$.

Donc $P = F$ d'où l'unicité d'une telle primitive.

Cette démo est beaucoup plus compliquée que celle qui pourrait être demandée au bac.

ROC 37 : Théorème fondamental de l'intégration ♥♥

Prérequis : (i) définition d'une primitive
(ii) définition de la dérivabilité d'une fonction
(iii) théorème des gendarmes
(iv) inégalité de la moyenne
(v) Unicité de la primitive avec condition initiale

Théorème **: Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un élément de I. Alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.**

Démo : On se limite au cas où la fonction f est croissante.

On souhaite savoir si la fonction F est dérivable : soit h tel que x, $x+h$ appartiennent à I.

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

Supposons $h>0$: comme f est croissante sur $[x;x+h]$, $\forall t \in [x;x+h]$, $f(x) \le f(t) \le f(x+h)$.

D'où (d'après l'in. de la moyenne), $f(x)(x+h-x) \le \int_x^{x+h} f(t)dt \le f(x+h)(x+h-x)$,

i.e. $f(x) \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \le f(x+h)$.

Si on suppose $h<0$, on obtient $f(x+h) \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \le f(x)$

Le taux de variations de F entre x et $x+h$ est donc compris entre $f(x)$ et $f(x+h)$. Or la fonction f est continue sur I donc $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ et $\lim_{h\to 0} f(x) = f(x)$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.

En conclusion, la fonction F est donc dérivable en x et $F'(x) = f(x)$: ainsi F est une primitive de f.

Par définition, $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$. Donc F s'annule en a.

ROC 38 : Intégration par parties ♥♥ (Pour info : a été demandée au Bac France 2007)

Prérequis : (i) Dérivée du produit de deux fonctions dérivables
(ii) Calcul de l'intégrale de f à l'aide d'une primitive de f
(iii) Linéarité de l'intégrale

Proposition **: Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I (avec u' et v' continues) et soient a, b deux éléments de I alors $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$.**

Démo : Pour tout $t \in I$, $(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$.

Les fonctions $(uv)'$, $u'v$ et uv' sont continues donc en intégrant sur $[a;b]$,

$$\int_a^b (uv)'dt = \int_a^b [u'(t)v(t)+u(t)v'(t)]dt = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Or la fonction uv est une primitive de $(uv)'$ donc $\int_a^b (uv)'dt = [uv]_a^b$.

Finalement $[uv]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt \Leftrightarrow \int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$

Géométrie dans l'espace :

ROC 39 : Expression analytique du produit scalaire ♥

Prérequis : (i) Définition du produit scalaire et d'un repère orthonormé
(ii) Propriétés algébriques du produit scalaire.

Théorème **: Soient $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs du plan; alors $\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.**

Démonstration : Le repère est orthonormé donc $\|\vec{i}\|^2 = \|\vec{j}\|^2 = \|\vec{k}\|^2 = 1$ et $\vec{i}\,.\,\vec{j} = \vec{i}\,.\,\vec{k} = \vec{j}\,.\,\vec{k} = 0$.

Or $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ donc

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\,.\,(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) = xx'\|\vec{i}\|^2 + yy'\|\vec{j}\|^2 + zz'\|\vec{k}\|^2 = xx' + yy' + zz'$.

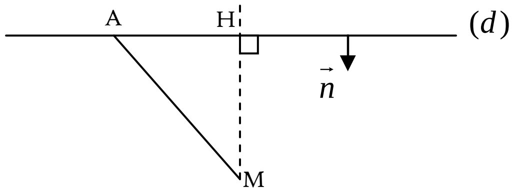
Remarque : On retrouve que $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}\,.\,\vec{u} = xx + yy + zz = x^2 + y^2 + z^2$, c'est-à-dire $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

ROC 40 : Distance d'un point à une droite dans le plan (cette démo est transposable dans l'espace...) ♥♥

Prérequis : (i) Définition du produit scalaire, du vecteur normal, de l'équation cart. d'une droite.
(ii) Calcul du produit scalaire avec les coordonnées des vecteurs.

Proposition **: Soit (d) la droite du plan d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$; la distance d'un point $M(\alpha;\beta)$ à la droite (d) est la longueur MH où H est la projection orthogonale de M sur (d)**

On a alors $MH = \dfrac{|\overrightarrow{AM}\,.\,\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



Démo : La distance de M à la droite (d) est la longueur MH.

On nomme $\vec{n}(a;b)$ un vecteur normal à la droite (d) d'équation $ax + by + c = 0$.

$\overrightarrow{AM}\,.\,\vec{n} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM})\,.\,\vec{n} = \overrightarrow{AH}\,.\,\vec{n} + \overrightarrow{HM}\,.\,\vec{n} = 0 \pm HM \times \|\vec{n}\|$ selon que $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont ou non de même sens. Donc $HM = |\overrightarrow{AM}\,.\,\vec{n}| / \|\vec{n}\|$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AM}(\alpha - x_A;\beta - y_A)\\ \vec{n}(a;b)\end{array}\right\} \overrightarrow{AM}\,.\,\vec{n} = (\alpha - x_A)a + (\beta - y_A)b = a\alpha + b\beta - (ax_A + by_A)$$

Mais $A \in (d)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite (d), i.e. $ax_A + by_A + c = 0$.

Donc $-(ax_A + by_A) = c$ et $\overrightarrow{AM}\,.\,\vec{n} = a\alpha + b\beta - (ax_A + by_A) = a\alpha + b\beta + c$. Ainsi, $HM = \dfrac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

ROC 41 : Barycentres ♥

Prérequis : Définition vectorielle du barycentre

Proposition **: Soit G le barycentre du système de points pondérés $\{(A_i, \alpha_i)\}_{1 \le i \le n}$ et soit M un point quelconque du plan ou de l'espace; $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) \times \overrightarrow{MG}$.**

Démo : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}$

$= \alpha_1 \overrightarrow{MG} + \alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MG} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{MG} + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\overrightarrow{MG}$

ROC 42 : Système d'équations paramétriques d'une droite ♥♥

Proposition **: Soit (d) la droite passant par le point $A(\alpha;\beta;\gamma)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$;**

$M(x;y;z) \in (d)$ si et seulement si $\begin{cases} x = \alpha + at \\ y = \beta + bt \\ z = \gamma + ct \end{cases}$, où t est un nombre réel.

Démo : $M(x;y;z) \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ *et* $\vec{u}$ *col.* $\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x - \alpha = at \\ y - \beta = bt \\ z - \gamma = ct \end{cases}$.