EXERCICES : INTÉGRALES

EXERCICE 1 **6 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + x\mathrm{e}^{-x}\right).$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

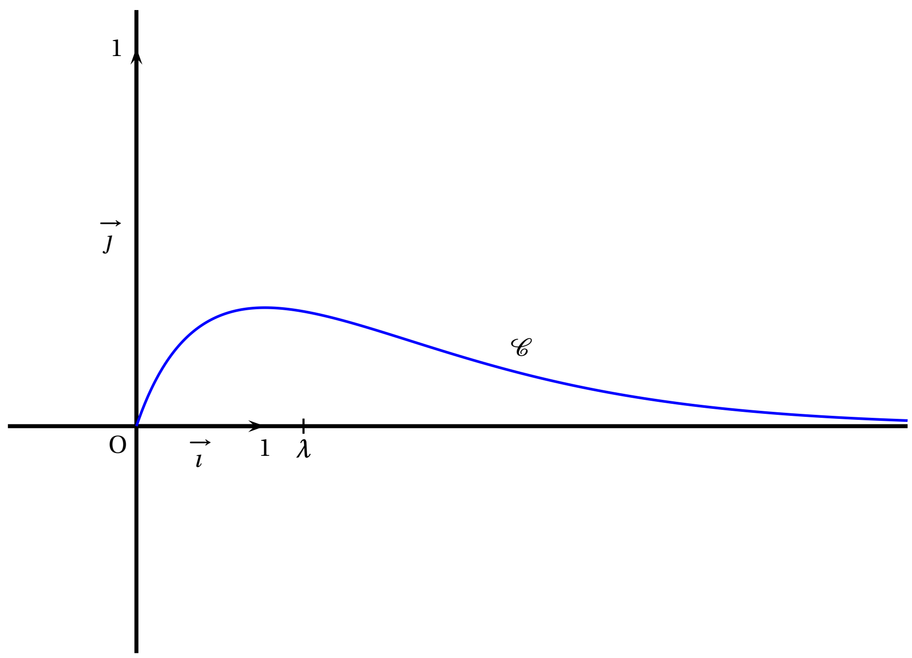
PARTIE I

1. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. Justifier que pour tout nombre réel positif x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.
3. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

PARTIE II

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $\mathscr{A}(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x$. On se propose de majorer $\mathscr{A}(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.

1. **Première méthode**
   - **a.** Représenter, sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie), la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $\mathscr{A}(\lambda)$.
   - **b.** Justifier que pour tout nombre réel λ strictement positif, $\mathscr{A}(\lambda) \leqslant \lambda \times f(1)$.
2. **Deuxième méthode**
   - **a.** Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\displaystyle\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de λ.
   - **b.** On admet que pour tout nombre réel positif u, $\ln(1+u) \leqslant u$.
     Démontrer alors que, pour tout nombre réel λ strictement positif,
     $\mathscr{A}(\lambda) \leqslant -\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} + 1$.
3. **Application numérique**
   Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de $\mathscr{A}(5)$, arrondi au centième. Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda = 5$?



EXERCICE 2 **5 points**

Partie A

Restitution organisée de connaissances On supposera connus les résultats suivants :

- $e^0 = 1$.
- Pour tous réels x et y, $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

1. Démontrer que pour tout réel x, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

2. Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n, $(e^x)^n = e^{nx}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx.$$

1. **a.** Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.

b. Calculer u_1. En déduire u_0.

2. Montrer que pour tout entier naturel $n, u_n \geqslant 0$.

3. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leqslant \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3 **6 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(e^x + 2e^{-x}\right).$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans un repére orthogonal est donnée en annexe.

Partie A - étude de fonction f.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x + \ln\left(1+2e^{-2x}\right)$.
On admet que, pour tout réel x, $f(x) = -x + \ln\left(2+e^{2x}\right)$.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
Etudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et de (d).

3. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d′) d'équation $y = -x + \ln 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

4. Etudier les variations de la fonction f.
Montrer que le minimum de la fonction f est égal à $\dfrac{3}{2}\ln 2$.

5. Tracer les droites (d) et (d′) sur la feuille annexe.

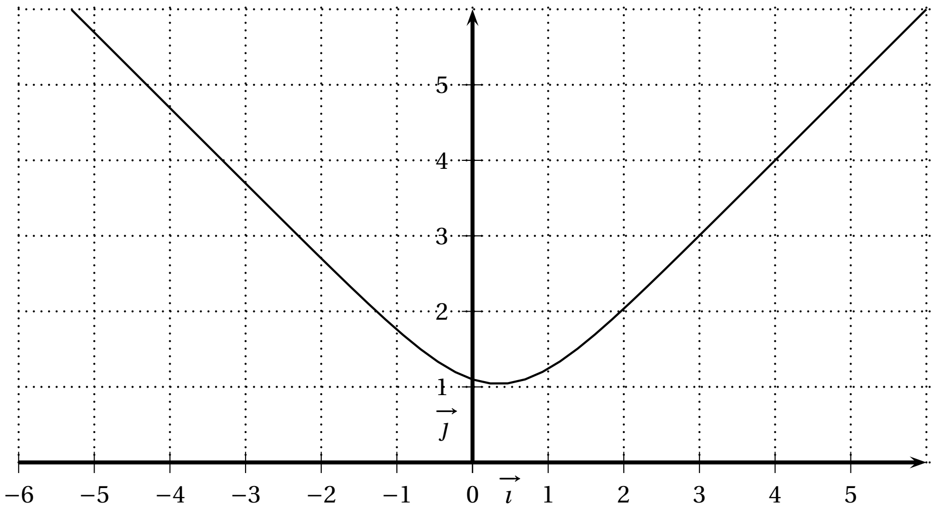
Partie B - Encadrement d'une intégrale.

On pose $I = \displaystyle\int_2^3 [f(x) - x]\,dx$.

1. Donner une interprétation géométrique de I.

2. Montrer que, pour tout $X \in [0\,;\,+\infty[$, $\ln(1+X) \leqslant X$.

3. En déduire que $0 \leqslant I \leqslant \displaystyle\int_2^3 2e^{-2x}\,dx$ et donner un encadrement de I d'amplitude 0,02.



EXERCICE 4 **5 points**

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels α et β, $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

1. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

   b. En déduire que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant u_0 \leqslant 1$.
2. Calculer u_1.
3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n$.

   b. Etudier les variations de la suite (u_n).

   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

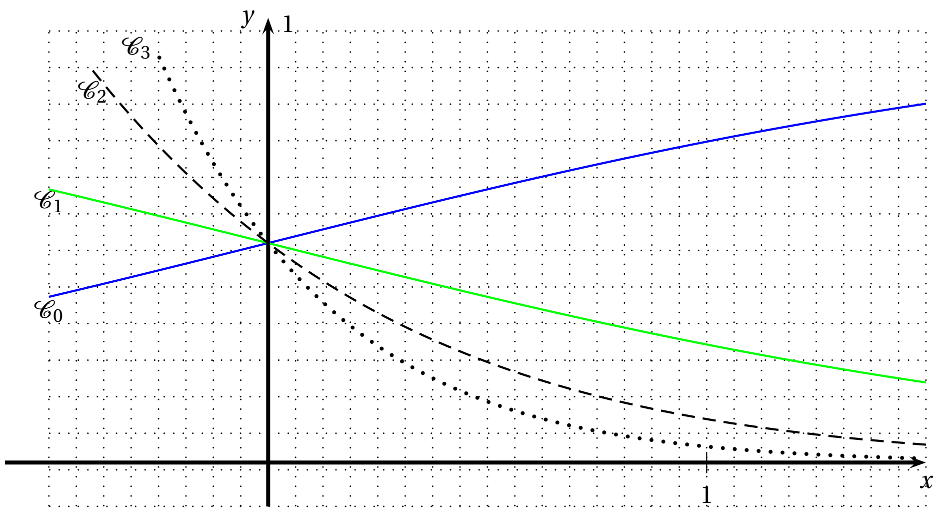
   b. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 5 **6 points**

Soit n un entier naturel.
On note f_n, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous :



Partie A : *Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes $\mathscr{C}_n$*

1. Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. On préciser ses coordonnées.
2. Etude de la fonction f_0
   - **a.** étudier le sens de variation de f_0.
   - **b.** Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.
   - **c.** Dresser le tableau de variation de fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.
3. Etude de la fonction f_1
   - **a.** Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x.
   - **b.** En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.
   - **c.** Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.
4. Etude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$
   - **a.** Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a :
   $$f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}.$$
   - **b.** Etudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
   - **c.** Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

Partie B : *étude d'une suite liée aux fonctions f_n*

On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. Calculer u_1 puis montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_0.
2. Démontrer que, pour tout entier n : $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,dx$.
3. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,dx$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.