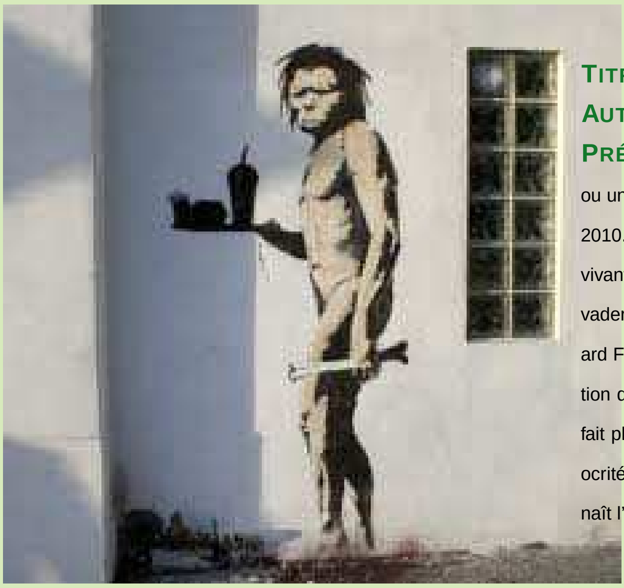
Chapitre 7

Probabilités discrètes

Hors Sujet



Titre : « Faites le mur »

Auteur : Banksy

Présentation succinte de l'auteur : Faites le mur ! est un film (?) ou un documentaire (documenteur !) réalisé par Banksy, sorti en salle le 15 décembre 2010. Thierry Guetta, un commerçant français excentrique, documentariste amateur vivant à Los Angeles, présenté dans le film comme le cousin de l'artiste Space Invader, aurait amassé une considérable archive d'interviews et d'action de Zevs, Shepard Fairey, André etc. A mesure qu'il filme de manière compulsive la nouvelle génération de l'art urbain, son obsession pour Banksy, le célèbre pochoiriste britannique se fait plus dévorante. Ils se rencontrent enfin. Banksy incite Guetta - au vu de la médiocrité de ses productions audiovisuelles - à se tourner vers l'art urbain. C'est alors que naît l'artiste Mr Brainwash.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »

THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

LEÇON 7

Probabilités discrètes

Résumé

Historiquement, les calculs de probabilités ont été tout d'abord utilisées pour étudier l'argent que pouvaient espérer gagner les princes au jeu. Elles servent à construire des modèles pour décrire des expériences aléatoires telles que : le numéro obtenu en lançant un dé, la face obtenue en lançant une pièce, la main obtenue dans un jeu de cartes, le tirage du loto, etc.

De nos jours et à niveau plus élevé, ces calculs sont abondamment utilisés en physique, en chimie, en biologie, en économie, en démographie, etc. Ils permettent de « prévoir » des événements (en probabilité, ce qui n'est donc pas forcément certain), tels que le temps qu'il fera, la croissance de la population, l'évolution des maladie, l'espérance du temps d'attente d'un bus, l'espérance de vie suivant certains paramètres, etc.

Malgré tout, le vocabulaire employé reste lié au jeu.

I) Rappels

I-1 Modéliser une expérience aléatoire

***Travail de l'élève* 1.**
Une expérience aléatoire consiste à choisir un nombre entre 1 et 10, faire la division euclidienne de ce nombre par 3 et regarder le reste obtenu. Proposer une modélisation de cette expérience.

Lors de la *modélisation* d'une expérience aléatoire, on est amené à choisir successivement :
- Un univers
- Des parties de cet univers
- Une loi de probabilité sur cet univers.

Définition 1 :
- Un des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **éventualité**, **événement élémentaire** ou encore **issue**.
- L'ensemble de toutes les issues possibles *a priori* d'une expérience aléatoire est appelé **univers**. On a pour habitude de noter cet ensemble Ω.
- Lorsque Ω est un ensemble fini, on appelle **cardinal** son nombre d'éléments, noté $Card(\Omega)$ ou $\#\Omega$.
- Une partie de Ω est appelé **événement**. C'est un sous-ensemble constitué d'issues de l'univers.

Exemple :
On lance une pièce de monnaie et on s'intéresse à la face obtenue : $\Omega = \{P, F\}$ et $\#\Omega = 2$
Remarquons que rien n'empêche d'ajouter l'issue « Tranche » à cet univers. C'est à l'énoncé de définir l'univers. En l'absence d'indication, on considère tacitement qu'il s'agit de l'univers usuellement utilisé dans telle ou telle situation.

Exemples :

– On lance un dé à 6 faces et on regarde la face obtenue : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ et $\#\Omega = 6$.
– On lance un dé à 6 faces on regarde si le numéro obtenu est pair ou impair : $\Omega = \{P, I\}$ et $\#\Omega = 2$.
  On remarque que l'univers dépend de l'observation qui est faite.
– On lance deux dés et on fait le produit P des nombres obtenus :
  $\Omega_P = \{1;2;3;4;5;6;8;9;10;12;14;15;16;18;20;24;25;30;36\}$ et $\#\Omega = 19$.
  La partie $A = \{6,12,18,24,30,36\}$ de l'univers est un événement qui peut se décrire par la phrase : « Obtenir un multiple de 6 ».

Exemples :

Il existe aussi des expériences aléatoires qui comportent une infinité d'issues :
– Choisir au hasard un entier naturel $\Omega = \mathbb{N}$ (ce type d'ensemble est dit *infini dénombrable*)
– Choisir au hasard un réel entre 0 et 1 : $\Omega = [0;1]$ (*infini non dénombrable*)
– Choisir un nombre premier au hasard : $\Omega = \{\text{Nombres premiers}\}$ (*infini dénombrable*)

Dans tout ce chapitre, on considère désormais expérience aléatoire d'univers fini Ω (avec $\#\Omega = n$).

Définition 2 :
Une loi de probabilité P sur Ω est une application P de allant l'ensemble des parties de Ω à valeurs dans $[0;1]$, et qui vérifie les conditions :
– $P(\Omega) = 1$
– $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour toutes parties A et B **disjointes** de Ω (ie pour tous événements A et B **incompatibles**)

Remarques :
– L'univers peut contenir des événements impossibles, à partir du moment où l'on définit la loi P telle que leur probabilité soit nulle.
– Dans ce chapitre, nous n'allons considérer que des cas « discrets », ie où Ω est dénombrable.
  Dans le cas où Ω est un intervalle de temps par exemple, on ne peut pas dénombrer ces parties et la modélisation est différente. On parle alors de probabilité « continue ». Dans ces cas là, un événement de probabilité nulle (improbable) n'est pas forcément impossible...
– Loi des Grands Nombres :
  Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire pouvant conduire à des issues $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ la fréquence de réalisation de chaque événement élémentaire $\{\omega_i\}$ se stabilise aux environs d'un nombre p_i compris entre 0 et 1. Ce nombre peut être considéré comme la probabilité de réalisation de l'événement $\{\omega_i\}$

Exemple :

Modéliser l'expérience suivante : « On lance deux pièces de monnaie et l'on note les faces obtenues. »

Propriété 1 :
La probabilité $P(A)$ d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Preuve
Cela se déduit de la définition, grâce à la deuxième condition, puisqu'un événement est la réunion de ses événements élémentaires, qui sont deux à deux disjoints.

Exemple :

Dans l'exemple précédent, calculer la probabilité de l'événement A : « Obtenir au plus une fois pile » .

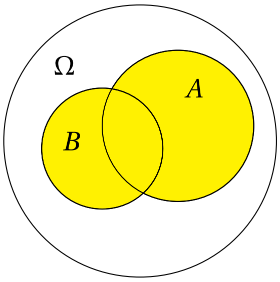
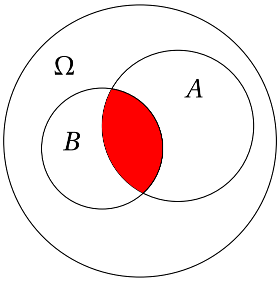
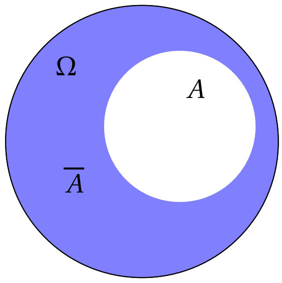
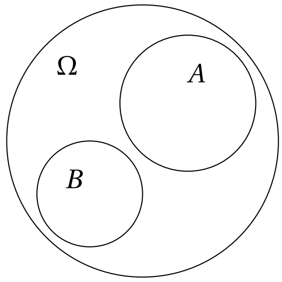
Proposition 1 : *Conséquences directes*

Pour tous événements A et B de Ω on a :

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Preuve

Commençons par un rapide rappel sur le langage ensembliste.

Réunion de A **et** B **:** $A \cup B$	**Intersection de** A **et** B **:** $A \cap B$	**Complémentaire de** A **:** $\overline{A}$	A **et** B **sont disjoints** : $A \cap B = \emptyset$
			

–
$$1 = P(\Omega) = P(\emptyset \cup \Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega) = P(\emptyset) + 1$$

D'où $P(\emptyset) = 0$.

–
$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

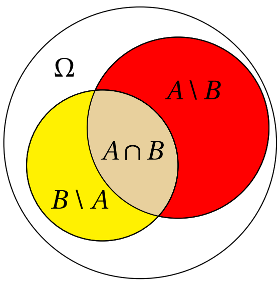
D'où $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

– Tout repose sur ces découpages en événements disjoints deux à deux :

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$



Preuve (Suite)

Ainsi

$$\begin{aligned}
P(A)+P(B)-P(A\cup B) &= P\Big((A\setminus B)\cup(A\cap B)\Big)+P\Big((B\setminus A)\cup(A\cap B)\Big)-P(A\cap B)\\
&= P\Big(A\setminus B\Big)+P\Big(A\cap B\Big)+P\Big(B\setminus A\Big)+P\Big(A\cap B\Big)-P(A\cap B)\\
&= P\Big(A\setminus B\Big)+P\Big(A\cap B\Big)+P\Big(B\setminus A\Big)\\
&= P\Big((A\setminus B)\cup(A\cap B)\cup(B\setminus A)\Big)\\
&= P(A\cup B)
\end{aligned}$$

D'où $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Exemple :

Dans l'exemple précédent, calculer $P(\overline{A})$.

Exemple :

Dans une classe, 10% des élèves jouent d'un instrument à cordes, 20% jouent d'un instrument à vent et 5% jouent d'un instrument à corde et d'un instrument à vent. On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité qu'il joue d'un instrument à cordes ou à vent ?

Exemple :

Dans un club, plusieurs activités sont proposés dont le tir à l'arc et le golf. Parmi les 50 adhérents, 30 pratiquent le tir à l'arc, 18 le golf et 6 les deux sports. Quelle est la probabilité pour qu'un adhérent choisi au hasard :

1. pratique le tir à l'arc ? le golf ?
2. pratique l'un au moins des deux sports ?
3. ne pratique ni le tir à l'arc, ni le golf ?

I-2 Une loi particulière

Définition 3 :

Lorsque l'on affecte la même probabilité à toutes les issues d'une expérience aléatoire, on dit qu'il y a équiprobabilité ou que l'on a choisi une loi équirépartie.

Propriété 2 :

Lorsque la loi de probabilité est équirépartie, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A)=\frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}}=\frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega}$$

Exemple :
On lance deux fois de suites un dé équilibré.

1. Représenter dans un tableau toutes les issues possibles.
2. Calculer la probabilité des événements :
   – A : « Obtenir un double »
   – B : « Obtenir deux numéros consécutifs »
   – C : « Obtenir au moins un six »
   – D : « Obtenir une somme supérieure strictement à 7 »

Attention !
Si on considère que l'univers est l'ensemble des sommes possibles (et non les couples de numéros), alors la loi n'est plus équiprobable

Exemple :
On lance quatre fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.
Quel est l'événement le plus probable :
– A : « Obtenir 2 piles et 2 faces »
– B : « Obtenir 3 piles et 1 face ou 3 faces et 1 pile » ?

Remarque : Si le dé (ou la pièce) est truqué alors on n'a plus l'équiprobabilité. L'énoncé fournit la loi de probabilité.

Remarque : Notons bien que dans certaines situations, l'expression « au hasard » mérite d'être expliquée. Imaginons que l'on dispose de deux bancs ayant chacun deux places (pl_1, pl_2) et (pl_3, pl_4). On suppose que toutes les places sont vides sauf la place pl_4. Arrive une personne à qui on demande de s'asseoir « au hasard ».. Quelle est la probabilité que les deux personnes soient assises sur le même banc ?
Modèle 1 : on choisit une place équiprobablement parmi les 3. La probabilité est alors de $\frac{1}{3}$.
Modèle 2 : on choisit un banc équiprobablement parmi les deux. La probabilité est alors $\frac{1}{2}$.
Moralité : les énoncés sont toujours suffisamment précis pour ne pas vous donner de choix à faire. Cependant, de votre côté, quand vous écoutez des statistiques utilisant les probabilités, faites attention aux conclusions que tirent les journalistes, qui n'y connaissent rien ! On peut faire dire à peu près n'importe quoi aux probabilités suivant les choix de modèle.

I-3 Variable aléatoire : rappels

Travail de l'élève **2.** L'éducation coûte trop cher. Afin de réaliser des économies, le gouvernement syldave a décidé de se passer à la fois de correcteurs et d'élèves. Tout est simulé dans les bureaux du ministère, le but étant d'obtenir une moyenne nationale satisfaisante à présenter aux investisseurs étrangers qui se rueront en Syldavie pour profiter d'une main d'œuvre aussi qualifiée.
Le candidat virtuel jette un dé virtuel : s'il sort un 6, il a 20, s'il tombe sur un autre numéro pair il a 10, s'il tombe sur un numéro impair, il a 5.
Quelle moyenne nationale peut *espérer* obtenir le ministre ? Cette moyenne est-elle une moyenne ? Cette moyenne sera-t-elle effectivement atteinte ?

Les derniers syldaves touchant un salaire pour leur travail coûtent encore trop cher aux entreprises. Un nouveau système de rémunération a donc été mis au point par l'ancien ministre de l'éducation syldave installé aujourd'hui au ministère des finances.

Pour garder son emploi, le salarié doit chaque mois verser 1000 neurones à l'entreprise puis doit lancer un dé. S'il sort un 6, il touche 3000 neurones : les 1000 versés au départ par le salarié plus 2000 versés par l'entreprise. Dans les autres cas, l'entreprise garde les 1000 neurones.
Quelle salaire un employé peut-il espérer toucher ?
Que se passera-t-il si l'entreprise propose 5000 neurones au lieu des 2000 ? Et si elle propose 1 000 000 000 de neurones avec un dé à 100 faces pour un versement initial de 1 000 000 de neurones ?

Définition 4 :
On appelle **variable aléatoire** toute fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, notée en général X.
Autrement dit, définir une variable aléatoire sur Ω c'est à associer un réel à chaque éventualité.

Remarque : Soit x_i le réel associé à l'issue ω_i de l'univers. On note $(X = x_i)$ l'événement « la variable aléatoire X prend la valeur x_i »

Exemple :
On lance trois pièces de monnaie, que l'on numérote 1 ; 2 et 3. Le jeu qui consiste à gagner 1 € chaque fois que F apparaît et à perdre 1 € chaque fois que P apparaît
La fonction X qui, à chaque issue, associe le gain (positif ou négatif) correspondant, est une variable aléatoire sur Ω.

Définition 5 : *Proposition (Admise)*
La **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0;1]$, qui à chaque x_i associe le nombre $P(X = x_i)$.

Remarques :
- Il s'agit bien d'une probabilité sur $X(\Omega)$.
- On représente cette loi à l'aide du tableau ci-dessous :

Valeurs x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_m	Total
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_m	1

Nous utiliserons désormais toutes ces notations.

Exemple :
Dans l'exemple ci-dessus, la loi de probabilité du gain X est résumée dans le tableau suivant :

gain x_i	-3	-1	1	3	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Définition 6 :
L'espérance mathématique de X est le nombre $E(X)$ définie par :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{m} x_i \times p(X=x_i)=p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_mx_m$$

La variance de X est le nombre $V(X)$ définie par :

$$V(X)=\sum_{i=1}^{m}[x_i-E(X)]^2p(X=x_i)=[x_1-E(X)]^2p_1+\cdots+[x_m-E(X)]^2p_m$$

L'écart-type de X est le nombre $\sigma(X)$ définie par :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

Remarques :

- On a choisi d'utiliser les carrés pour la variance de manière arbitraire pour ne pas avoir de problèmes de signes ; on aurait pu choisir une autre méthode, mais celle-ci a l'avantage de rappeler la distance euclidienne bien connue. La variance est en ce sens homogène au carré d'une distance. L'écart-type définit donc une distance proprement dite.
- Lorsque X représente le gain du joueur à un jeu de hasard, $E(X)$ représente le gain moyen qu'il peut espérer par partie, lorsqu'on joue un grand nombre de fois. L'écart type est une caractéristique de la dispersion des valeurs de X .

Remarque : Vous pouvez obtenir ces valeurs très facilement à l'aide de vos calculatrices. Il suffit de rentrer les valeurs prises par la variable aléatoire en liste 1, et les probabilités en liste 2.

Exemple :
Dans l'exemple précédent et calculer l'espérance, la variance et l'écart-type. Interpréter vos résultats.

Exemple :
Même question pour les deux exemples de l'activité.

Propriété 3 :
L'espérance est linéaire : $E(aX+b)=aE(X)+b$ et $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
On en dédut la formule : $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

Exercice 1 :

Prschtr, le champion syldave de danse sous-marine nocturne en scaphandre de 150 kg est inquiet avant la finale. Trois de ses figures l'inquiètent. La probabilité de réussir la première est de 0,95, la deuxième de 0,93 et la troisième de 0,9.
On suppose que le moral de Prschtr est à toute épreuve et les réussites de ses figures sont indépendantes.

1. Quelle est la probabilité que Prschtr réussisse ses trois figures ?
2. Quelle est la probabilité d'en manquer une seule ?
3. D'en manquer deux ?
4. De manquer les trois ?
5. Dresser alors le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le nombre de sauts réussis. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
6. Manquer la première figure fait perdre 0,2 point et la deuxième ou la troisième 0,1 point. Les pénalités s'ajoutent.
   Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y donnant le total des points de pénalités ? Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.

II) Conditionnement

II-1 Probabilité conditionnelle

Travail de l'élève **3.** Une enquête est effectuée auprès des 100 éléves d'un lycée syldave concernant le temps de travail hebdomadaire et le sexe des éléves.
On a obtenu le tableau suivant

travail / sexe	< 5 minutes	≥ 5 minutes
filles	20	15
garçons	60	5

Soit T l'ensemble de ceux qui travaillent plus de 5 minutes par semaine et G l'ensemble des garçons.
On suppose les éléves syldaves indiscernables à la vue, l'ouïe, le goût, le toucher et l'odorat.

1. Calculer la probabilité que l'éléve prélevé travaille plus de 5 minutes.
2. Calculer la probabilité pour que ce soit un garçon.
3. Calculer la probabilité pour que l'éléve prélevé soit un garçon qui travaille plus de 5 minutes.
4. Maintenant, **parmi les garçons**, on en choisit un au hasard.
   L'univers a donc changé, mais pas les propriétés du tirage, ce qui assure encore l'équiprobabilité.
   Calculer la probabilité pour que ce garçon travaille plus de 5 minutes.
   On dit que c'est ***la probabilité conditionnelle de T sachant G*** *qu'on note* $P_G(T)$
5. Conjecturer une formule liant $P(G)$, $P(T \cap G)$ et $P_T(G)$

Définition 7 : *Proposition (Admise)*

Soient A et B deux événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P, avec $P(B) \neq 0$.
La probabilité de *A* sachant *B* est définie par

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Remarques :
- Il s'agit bien d'une probabilité sur Ω.
- On utilisera tout autant cette formule sous la forme : $P(A \cap B) = P(B)P_B(A) = P(A)P_A(B)$

Définition 8 :

Des événements non vides A_1, A_2, ..., A_k forment une **partition** de Ω s'ils sont deux à deux disjoints et que leur réunion forme Ω.

Remarque : Cela revient à découper Ω en morceaux disjoints A_1, A_2, ... , A_k,

Exemples :

Séparer une classe en un groupe fille et un groupe garçon permet de réaliser une partition de la classe.
Séparer une classe en un groupe fille, un groupe garçon et un groupe d'abonnés au chasseur syldave ne permet pas de réaliser une partition car certains éléves peuvent appartenir à deux groupes en méme temps.
Séparer une classe en un groupe de porteurs de sandales avec chaussettes et un groupe d'imitateurs du Schblurb syldave ne permet pas de réaliser une partition car certains éléves ne sont ni dans l'un ni dans l'autre groupe.

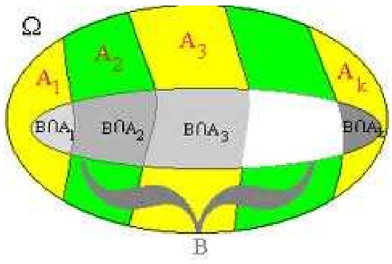
Théorème 1 :

Soit A_1, A_2, ... , A_k, une partition de $Omega$ et B un événement quelconque de Ω. On a :

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_k)$$

Cette union étant disjointe, on a donc

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_k)$$



Exemple :

On considère les unres U_1, U_2 et U_3 contenant respectivement :

- 1 boules rouge et 5 jaunes
- 3 rouges et 1 jaune
- 1 rouge et 2 jaunes

On choisit une unrne au hasard et on tire une boule dans cette urne.

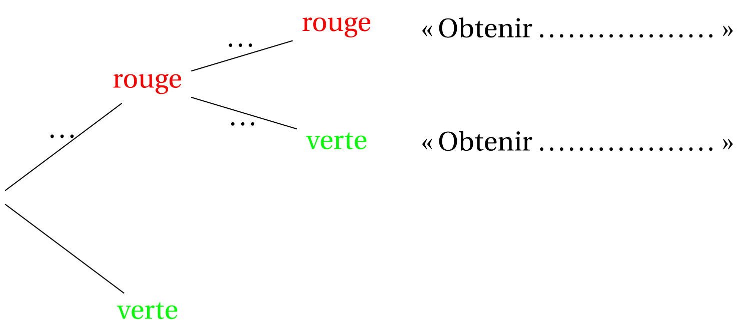
Quelle est la probabilité que la boule tirée soit jaune ?

II-2 Application : Arbres de probabilité

Travail de l'élève **4.** La partie précédente nous permet de retrouver toutes les formules sur les arbres vues et admises en première.

Une urne contient 8 boules, 3 rouges et 5 vertes. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1. Compléter l'arbre suivant, qui modélise l'expérience (chemins et probabilités correspondantes) :



2. Calculer les probabilité des événements suivants :

- A = « Tirer deux boules rouges »
- B = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage sachant que l'on en a tiré une au premier tirage »
- C = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage sachant que l'on a tiré une verte au premier »
- D = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage »
- E = « Tirer une boule rouge au premier tirage »
- F = « Tirer deux boules de la même couleur »
- G = « Tirer au moins une boule verte ?

Méthode

Règle 1 : La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est égale à 1.

Règle 2 : La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches de ce chemin.

Cela correspond à la probabilité de l'intersection des événements qui le composent.

Règle 3 : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins réalisant à cet événement.

Remarques :

- La règle 1 provient de la définition d'une probabilité
- La règle 2 de la définition de la probabilité conditionnelle
- La règle 3 de la formule des probabilités totales.

Exemple :

Sophie a mis des dragées dans une boîte, les unes contiennent une amande, les autres non. On sait que :

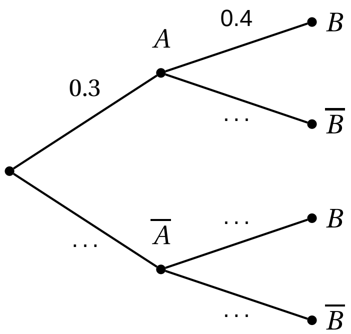
– 30% des dragées contiennent une amande.
– 40% des dragées avec amandes sont bleues„ les autres sont roses ;
– 75% des dragées sans amande sont bleues, les autres sont roses.

Sophie choisit au hasad une dragée dans la boîte. On admet que toutes les dragées ont la même probabilité d'être choisies.

On considère les événements suivants :

– A : « la dragée choisie contient une amande »
– B : « la dragée choisie est bleue »

1. Compléter l'arbre des fréquences donnée ci-dessous



2. Décrire l'événement $A \cap B$ par une phrase. Montrer que sa probabilité est égale à 0.12.

3. Calculer la probabilité de l'événement B.

4. Décrire par une phrase l'événement $A \cup B$ par une phrase, puis calculer sa probabilité.

Exemples :

1. On lance un dé. Si le résultat est pair on tire un jeton d'une urne contenant 3 jetons (numérotés 1, 2 et 3). Quelle est la probabilité que la somme dé et du jeton éventuel soit égale à 5 ?
2. Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules blanches. On tire des boules de l'urne (sans remise) jusqu'à obtention d'une boule rouge. Quelle est la probabilité d'obtenir les 3 boules blanches ?
3. Le lièvre et la tortue : on lance un dé. Si le 6 sort, le lièvre gagne, sinon la tortue avance d'une case. On continue jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant en suivant les cases ci-dessous. Quelle est la situation la plus enviable : celle du lièvre ou de la tortue ?

Exemple :

Simplet, Goldorak et Monica Bellucci reviennent de la forêt avec trois paniers contenant respectivement 1, 2 et 3 champignons. Dans chaque panier, il y a un champignon vénéneux.

On choisit un des trois paniers au hasard, et dans ce panier on goûte un des champignons choisi lui aussi au hasard.

Quelle est la probabilité de se tordre de douleur puis de succomber dans d'atroces souffrances quelques minutes après ?

Un élève syldave qui passait par là a choisi un panier au hasard puis un champignon dans ce panier. On constate qu'il se tord de douleur puis succombe dans d'atroces souffrances : quelle est la probabilité qu'il ait goûté un champignon venant du panier de Monica Bellucci ?

Exemple :

Pour réussir une carrière politique en Corrèze, il faut une implantation locale. Dans cette perspective, un jeune énarque décide d'acquérir un château corrézien. Pour se faire connaître, il hante les commices agricoles du département. Il a ainsi deux chances sur trois d'être élu député. Si, par dessus le marché, il touche le derrière des vaches, cette probabilité passe à trois chances sur quatre. Il y a trois chances sur cinq pour que, son conseiller en communication lui ayant refilé le tuyau, il touche le derrière des vaches.

1. Calculer la probabilité pour qu'il soit élu député.
2. Il est député. Calulez la probabilité pour qu'il ait touché le derrière des vaches.

III) Indépendance

III-1 Evénements et variables aléatoires

Définition 9 :

Deux événements A et B sont dits **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarques :

- Cela revient à dire que $P_A(B) = P(B)$ et $P_B(A) = P(A)$.
- Dans ce cas, la réalisation de l'un n'a pas d'influence sur celle de l'autre.
- Ne pas confondre incompatibles et indépendants !
- Retenez que la notion d'indépendance probabiliste est plus large que la notion intuitive. Simplement, avoir observé la réalisation de A ne modifie pas la probabilité d'une éventuelle réalisation de B.

Exemples :

- Ω est indépendant de tout événement A, car $P(\Omega \cap A) = P(A) = P(A) \times 1 = P(A) \times P(\Omega)$.
- Montrer que deux événements incompatibles de probabilité non nulle ne sont pas indépendants.

Définition 10 :

Deux variables aléatoires X et Y sur un unviers Ω muni d'une loi P sont dites indépendantes lorsque pour toute valeur x_i prise par X et pour toute valeur y_j prise par Y, les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants, ie

$$P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$$

Exemple :

On lance un dés parfaitement équilibré. On considère les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers par :

- X prend la valeur 1 si le résultat est pair, -1 sinon ;
- Y prend la valeur 2 si le résultat est 2 ou 5, la valeur 1 sinon.

Les variables X et Y sont indépendantes (à montrer)

III-2 Répétition d'expériences indépendantes

Définition 11 :
Des expériences aléatoires répétées sont indépendantes si le résultat de l'une d'entre elles n'a aucune influence sur le déroulement des autres.

Propriété 4 :
Si on suppose que des expériences sont indépendantes, alors la probabilité d'une liste de résultats est égale au produit des probabilités de chacun des résultats.

Exemple :
On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. Quelle est la probabilité de l'événement A : « Obtenir au moins une fois Pile » ?

Exemple :
On lance un dé n fois. Comment choisir n pour que la probabilité p_n d'obtenir au moins un 6 au bout de n lancers soit supérieure à 0,95 ?
Indication : Considérer l'événement contraire.

Contre-Exemple :
Les tirages du loto d'une semaine sur l'autre sont des expériences aléatoires indépendantes. Par contre, un tirage en lui-même est une répétition d'expériences aléatoires dépendantes, puisqu'il s'agit de tirages successifs dans une même urne sans remise.

IV) Loi de Bernoulli et loi Binomiale ?