EXERCICES : FONCTIONS LOGARITHMES ET AUTRES NOUVELLES FONCTIONS

Exercice 1 : Exercice 1 : Antilles-Guyane 2010 7 points

Commun à tous les candidats

PARTIE A - Restitution organisée des connaissances

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.
On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$ on a : $\exp(\ln x) = x$.
A partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ qui à x associe $\dfrac{1}{x}$.

PARTIE B - étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{x}.$$

Le but du problème est l'étude de cette fonction *(et le calcul d'une aire)*.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 3 cm.

I - étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 1 - \ln x.$$

1. Etudier les variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. En déduire le signe de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

II - étude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative $\mathscr{C}$

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?
2. Déterminer la limite en $+\infty$ de f puis montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$.
4. En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Déterminer le point A de la courbe $\mathscr{C}$ en lequel la tangente $\mathscr{T}$ est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.
6. Dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ tracer les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{T}$ et la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 2 : Exercice 3 : Réunion septembre 2010 **6 points**

Commun à tous les candidats

Pour tout nombre réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f_k(x) = \ln(x) - kx^2 + 1.$$

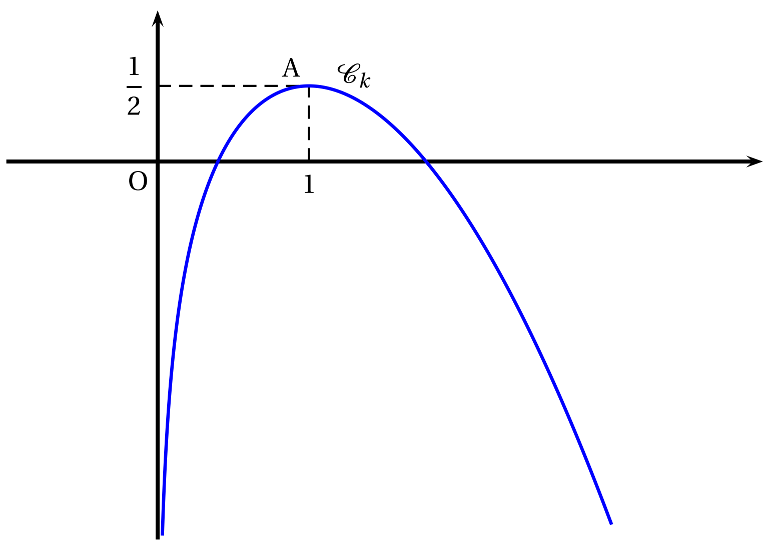
Partie A

1. Déterminer la limite de la fonction f_k en 0.
2. On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
   Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$.
   En déduire la limite de la fonction f_k en $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $f_k'(x) = \dfrac{1-2kx^2}{x}$.
4. Pour un nombre réel k strictement positif : on donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f_k.

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$		$+\infty$
$f_k(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	$\dfrac{1-\ln(2k)}{2}$	$\searrow$	

   Justifier les renseignements sur les variations de la fonction f_k figurant dans ce tableau.

5. On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_k$ représentative d'une fonction f_k pour une certaine valeur du nombre réel k strictement positif. Le point $\text{A}\left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_k$.
   Quelle est la valeur du nombre réel k correspondant ? Justifier la démarche.



Exercice 3 : Exercice 1 : Métropole 2010 — 6 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

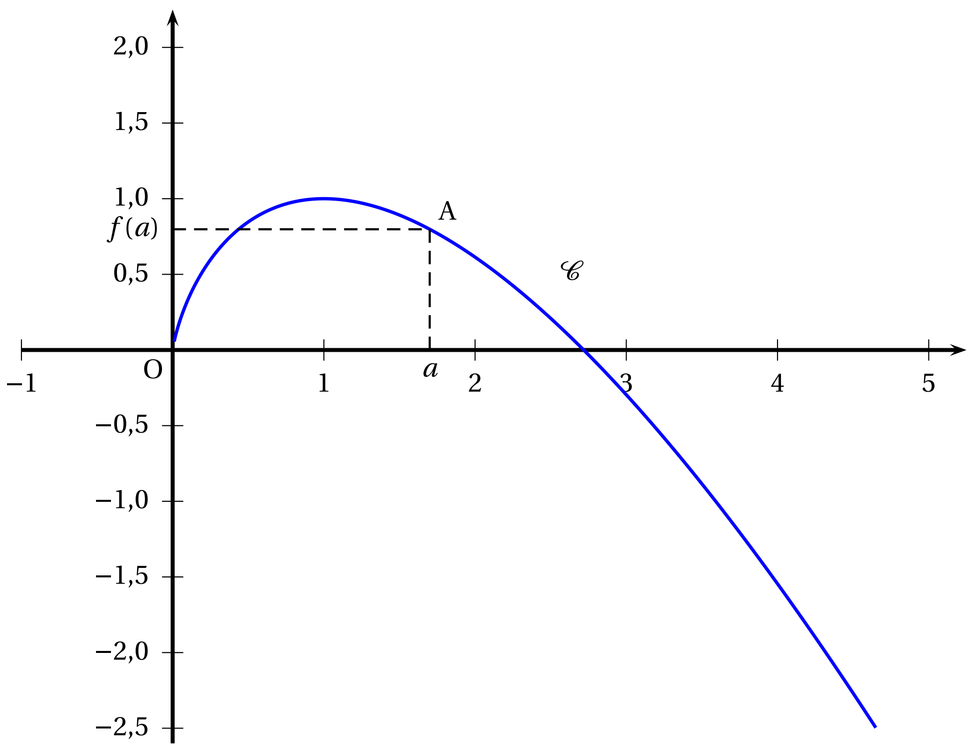
$$f(x) = x(1 - \ln x).$$

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

Partie 1 : étude de la fonction f

1. Etudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.
2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
4. Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_a) au point A de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse a.
   a. Déterminer, en fonction du nombre réel a, les coordonnées du point A$'$, point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées.
   b. Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_a). Sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie) construire la tangente (T_a) au point A placé sur la figure.

ANNEXE 1 (Exercice 1)
(à rendre avec la copie)



Exercice 4 : Exercice 1 : Nouvelle-Calédonie 2010 **7 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE B :

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

1. **a.** étudier le sens de variation de la fonction φ sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

   b. Calculer $\varphi(\mathrm{e})$. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

   c. Déterminer le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}.$$

   On note f' la fonction dérivée de f.

   a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \geqslant 1$ on a : $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x\left(1 + x^2\right)^2}$.

   b. Déduire de la question 1. le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

   c. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ on a :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln x}{x^2}.$$

   d. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.