I.3 INTRODUCTION DE LA FONCTION EXPONENTIELLE PAR LA MÉTHODE D'EULER

1. *L'importance d'une condition initiale*
   Supposons qu'il existe une fonction f, non nulle, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \text{ sur } \mathbb{R}$$

   a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $g = \lambda f$. Démontrer que :

$$g' = g \text{ sur } \mathbb{R}$$

   Conclure.

   b. Soit g une fonction vérifiant aussi $g' = g$ sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que $f + g$ vérifie la même condition. Conclure.

   c. Supposons maintenant qu'il existe une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions :

$$(P)\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   i. On considère la fonction c définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$c(x) = f(x)f(-x)$$

   Montrer que c est une fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.
   En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

   ii. Démontrer que si g est une fonction qui vérifie (P) alors $g = f$.[1]
   Conclure.

Remarque : Dans cette partie on vient de démontrer que s'il existe une solution alors il en existe une infinité, puis en imposant une condition initiale (ici $f(0) = 1$) s'il existe une solution à notre équation alors elle est unique.

Dans la suite, la fonction f est l'unique solution[2] satisfaisant la condition (P) i.e :

$$(P)\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Nous allons maintenant essayer de tracer la représentation graphique de f grâce à la méthode d'Euler.

1. On pourra considérer et dériver la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h = \frac{g}{f}$
2. On suppose pour le moment qu'une telle fonction existe. La preuve rigoureuse de cette existence sera faite ultérieurement.

2. *Vers la représentation graphique*
On rappelle que si f est dérivable en a, alors pour des valeurs de h proche de 0 on a :

$$f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$$

Il s'agit d'une approximation affine de f, la méthode d'Euler repose sur cette approximation.

a. En utilisant les conditions satisfaites par f, démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$f(a+nh) \simeq (1+h)^n f(a)$$

b. On note (u_n) la suite définie, sur $\mathbb{N}$, par :

$$u_n = (1+h)^n f(a)$$

Démontrer que (u_n) est géométrique et préciser sa raison.

c. Dans cette question, on suppose que $a = 0$. On a donc :

$$f(nh) \simeq (1+h)^n$$

i. On pose $x = nh$. Démontrer que pour n assez grand :

$$f(x) \simeq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Remarque : C'est cette suite $(u_n(x))$ définie par :

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

que nous utiliserons pour montrer rigoureusement l'existence de la fonction exponentielle.

ii. A l'aide de la calculatrice, tracer les courbes des approximations de la fonction f pour des valeurs de n égales à 10, 100 et 1000.

iii. En prenant $n = 1000$, donner une valeur approchée du nombre $f(1) \simeq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Remarque : Le nombre $f(1)$ est encore noté e. En fait on a :

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Conclusion : Cette fonction f vérifiant les conditions

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

est appelée **fontion exponentielle**.
On vient de voir à quoi ressemble sa représentation graphique. nous verrons, dans le cours, que cette fonction possède des propriétés remarquables notamment celle de transformer des « somme » en « produits », i.e :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \forall y \in \mathbb{R} \quad : \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$