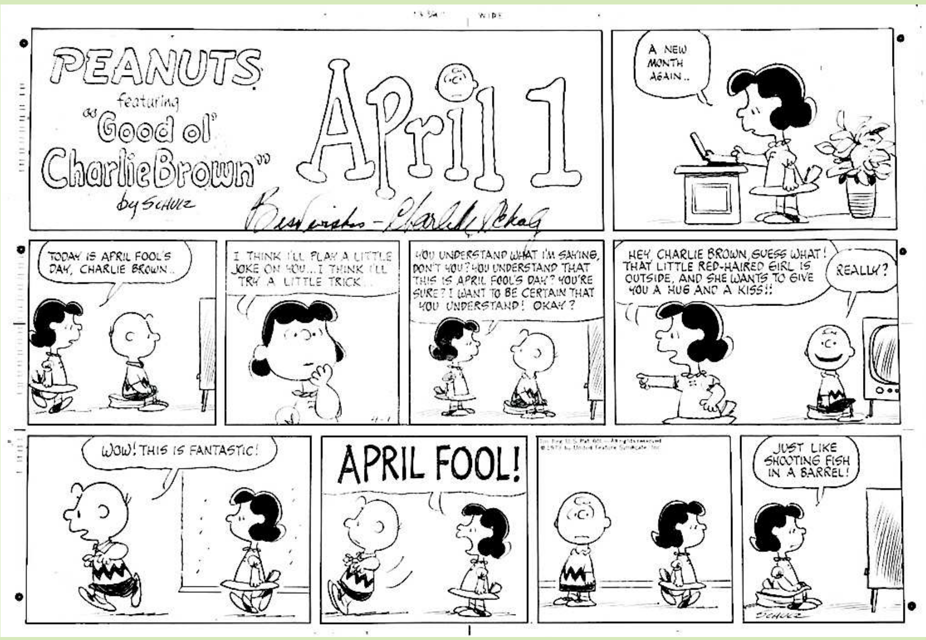
Chapitre 5

Equations différentielles et fonction exponentielle



Hors Sujet

Titre : « Peanuts »

Auteur : Charles Schulz

Présentation succinte de l'auteur : Peanuts est le nom d'un comic strip écrit et dessiné quotidiennement, sans interruption et sans assistance par l'Américain Charles M. Schulz (1922 - 2000) d'octobre 19501 jusqu'à sa mort, en février 2000. Il aura écrit au total 17 897 strips dont 2 506 éditions du dimanche.

Peanuts est une série de gags qui tournent autour de deux personnages centraux, un garçon maladroit, malchanceux et déprimé, Charlie Brown et son chien, Snoopy. Le strip s'appuie sur le principe du running gag où les mêmes situations entre les personnages reviennent tout au long de la bande dessinée. De plus, chacun des personnages a ses particularités, ses obsessions et ses accessoires propres, qui ressurgissent chaque fois qu'ils apparaissent.

Le comic a été, à partir des années 1960 un succès planétaire. La popularité du strip et le nombre colossal de licences pour des publicités ou produits dérivés ont fait de Charles M. Schulz une des célébrités les plus riches du monde. À la mort de Schulz, le comic était publié dans plus de 2 600 journaux, dans 75 pays différents et dans 21 langues.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »

THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

LEÇON 5

Equations différentielles et fonction exponentielle

Résumé

De nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques ou autres sont modélisés par une fonction f qui est proportionnelle à sa dérivée f'. (Par exemple, le phénomène de désintégration de noyaux radioactifs)
Nous allons ici nous intéresser à l'une des fonctions de ce type.
Plus particulièrement, que peut-on dire d'une fonction qui serait égale à sa dérivée ?
Nous connaissons déjà au moins une fonction égale à sa dérivée : la fonction nulle ! Mais cette fonction est sans intérêt. Notre objectif est d'en rechercher d'autres.

I) Généralités

I-1 Exemple de fonction proportionnelle à sa dérivée

Travail de l'élève **1.** Le radon est un gaz radioactif qui se désintègre avec le temps. On a pu observé qu'une quantité quelconque de radon perd environ 16.5% de sa masse chaque jour.

1. Pour étudier l'évolution d'une masse initiale m de radon sur plusieurs jours, on peut dans un premier temps modéliser la situation en considérant la suite (M_n) où M_n désigne la masse de radon restant au bout de n jours (n entier).
   - **a.** Quelle est la nature de la suite (M_n) ?
     La suite (M_n) est donc géométrique de raison $1 - \frac{16.5}{100} = 0.835$.
   - **b.** En déduire que pour tout entier naturel n, il existe un réel $r(n)$, ne dépendant que de n, tel que

$$M_n = r(n) \times m$$

On en déduit que $M_n = M_0 \times q^n = m \times 0.835^n$. On a bien que $M_n = r(n) \times m$.

2. La désintégration du radon ne se faisant pas à un instant donné, mais de manière continue, il paraît plus pertinent de modéliser la situation par une fonction M définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
Pour tout réel positif x, le réel $M(x)$ est la masse de radon restant au bout de x jours (x réel positif).
Compte tenu de ce qui précède, il paraît alors naturel de faire l'hypothèse que, pour toute masse initiale m de radon, la masse $M(x)$ restant au bout de x jours (x réel positif) est $r(x)\times n$ où $r(x)$ est un réel ne dépendant que de x.

a. Justifier que, pour tous réels x et y positifs on a

$$M(x+y)=r(x+y)\times m$$

On sait que $M(x)=r(x)\times m$ **pour tout** x**, donc on a aussi** $M(x+y)=r(x+y)\times m$ **pour tout** $(x,y)\in\mathbb{R}^2$**.**

b. Justifier que pour tous réels x et y positifs on a

$$M(x+y)=r(y)\times M(x)$$

On sait que $M(x+y)$ **correspond à la masse restante au bout de** y **jour(s) à partir de la masse restante au** x^{ieme} **jour.**
Donc on a $M(x+y)=r(y)\times M(x)$**.**

c. Déduire des deux questions précédentes que

$$r(x+y)=r(x)\times r(y)$$

On a $M(x+y)=r(x+y)m$ **et** $M(x+y)=r(y)M(x)=r(y)r(x)m$**.**
Nécessairement on a $r(x+y)=r(x)r(y)$**.**

On dit que r transforme les somme en produit.

3. En supposant qu'une telle fonction r existe et soit non nulle, regardons ce qui se passe si de plus elle est dérivable.

a. Soit x un réel positif strictement (fixé). On pose $g : y\mapsto r(x+y)$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
Montrer que $g'(y)=r(x)\times r'(y)$.
On a $g(y)=r(x+y)=r(x)r(y)$**. Or,** x **étant fixé,** $r(x)$ **est un nombre constant.**
Donc $g'(y)=r(x)r'(y)$

b. En remplaçant y par 0 dans la relation précédente, déduire que $r'(x)=k\times r(x)$ où k est un réel.
On a $g'(y)=r(x)r'(y)$ **pour tout** $y\in\mathbb{R}^+$ **donc en particulier** $g'(0)=r(x)r'(0)$**.**
Or $g'(0)=r'(x+0)=r'(x)$**. Donc** $r'(x)=r(x)\times r(0)=k\times r(x)$ **avec** $k=r'(0)$**.**

Ceci est vrai pour tout x, donc la fonction r, si elle existe, est proportionnelle à sa dérivée.
Elle vérifie une équation différentielle.

I-2 Définition

Définition 1 :
Une équation différentielle est une équation :
- où l'inconnue est une fonction, que l'on note habituellement y
- dans laquelle apparaît certaines dérivées de y, comme par exemple l'équation suivante :

$$y''(x) = 3y'(x) + 2y(x)$$

que l'on s'autorise à noter $y'' = 3y' + 2y$.

Exemples :
- L'équation $y' = y$ est une équation différentielle, dont nous ne connnaissons pas encore de solution.
- L'équation $y' = x$ est une équation différentielle, dont nous savons que $y = \frac{x^2}{2}$ est une solution étant entendu que, dans une équation différentielle l'inconnue est une fonction. y désigne donc une fonction.

Définition 2 :
On appelle solution d'une équation différentielle (E) tout couple (f, I) où f est une fonction qui vérifie (E) sur I. On dira que f est solution de (E) sur I.
Résoudre une équation différentielle sur I c'est trouver toutes les fonctions solutions de (E) sur I.

Remarques :
- Lorsqu'on ne précise pas l'intervalle I, il s'agit de l'intervalle $\mathbb{R}$.
- Rechercher les primitives d'une fonctions continue f sur un intervalle I, c'est résoudre sur I l'équation différentielle :

$$y' = f(x)$$

Exercice 1 **:**
Trouver mentalement les fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $y' = \sin x$
2. $y' = 0$
3. $y'' = 0$
4. $y'' = x$
5. $y' = 5x(x^2+3)^4$
6. $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

On distingue plusieurs types d'équation différentielle :
- Les linéaires à coefficients constants sans second membre du premier ordre :

$$y' + 5y = 0$$

- Les linéaires à coefficients constants avec second membre du premier ordre :

$$y' + 5y = \sin x$$

- Les linéaires à coefficients constants sans second membre du second ordre :

$$2y'' - 3y' + 5y = 0$$

– Les linéaires à coefficients variables sans second membre du premier ordre :

$$y' - 5xy = 0$$

– Les équations différentielles non linéaire :

$$y' \times y = 0$$

– etc

Remarque : Nous n'étudierons que des équations différentielles des deux premiers types.

I-3 Construction de la fonction exponentielle par la méthode d'Euler

1. *L'importance d'une condition initiale*

   Supposons qu'il existe une fonction f, non nulle, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

   $$f' = f \text{ sur } \mathbb{R}$$

   a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $g = \lambda f$. Démontrer que :

   $$g' = g \text{ sur } \mathbb{R}$$

   Conclure.

   b. Soit g une fonction vérifiant aussi $g' = g$ sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que $f + g$ vérifie la même condition. Conclure.

   c. Supposons maintenant qu'il existe une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions :

   $$(P)\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   i. On considère la fonction c définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$c(x) = f(x)f(-x)$$

   Montrer que c est une fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.
   En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

   ii. Démontrer que si g est une fonction qui vérifie (P) alors $g = f$.[1]
   Conclure.

Remarque : Dans cette partie on vient de démontrer que s'il existe une solution alors il en existe une infinité, puis en imposant une condition initiale (ici $f(0) = 1$) s'il existe une solution à notre équation alors elle est unique.

Dans la suite, la fonction f est l'unique solution[2] satisfaisant la condition (P) i.e :

$$(P)\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Nous allons maintenant essayer de tracer la représentation graphique de f grâce à la méthode d'Euler.

1. On pourra considérer et dériver la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h = \dfrac{g}{f}$

2. On suppose pour le moment qu'une telle fonction existe. La preuve rigoureuse de cette existence sera faite ultérieurement.

2. *Vers la représentation graphique*
On rappelle que si f est dérivable en a, alors pour des valeurs de h proche de 0 on a :

$$f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$$

Il s'agit d'une approximation affine de f, la méthode d'Euler repose sur cette approximation.

a. En utilisant les conditions satisfaites par f, démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$f(a+nh) \simeq (1+h)^n f(a)$$

b. On note (u_n) la suite définie, sur $\mathbb{N}$, par :

$$u_n = (1+h)^n f(a)$$

Démontrer que (u_n) est géométrique et préciser sa raison.

c. Dans cette question, on suppose que $a = 0$. On a donc :

$$f(nh) \simeq (1+h)^n$$

i. On pose $x = nh$. Démontrer que pour n assez grand :

$$f(x) \simeq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Remarque : C'est cette suite $(u_n(x))$ définie par :

$$u_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

que nous utiliserons pour montrer rigoureusement l'existence de la fonction exponentielle.

ii. A l'aide de la calculatrice, tracer les courbes des approximations de la fonction f pour des valeurs de n égales à 10, 100 et 1000.

iii. En prenant $n = 1000$, donner une valeur approchée du nombre $f(1) \simeq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
Remarque : Le nombre $f(1)$ est encore noté e. En fait on a :

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Conclusion : Cette fonction f vérifiant les conditions

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

est appelée **fontion exponentielle**.
On vient de voir à quoi ressemble sa représentation graphique. nous verrons, dans le cours, que cette fonction possède des propriétés remarquables notamment celle de transformer des « somme » en « produits », i.e :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \forall y \in \mathbb{R} \quad : \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

II) Equations différentielles linéaires du premier ordre

II-1 Equations différentielles du type $y' = y$

Théorème 1 :
Le problème différentiel :

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}$

Remarque : Autrement dit il n'existe qu'une et une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée qui vaut 1 en 0

Preuve
L'existance est délicate et admise provisoirement (même si on pourrait la démontrer en utilisant des suites adjacentes).
L'unicité a été démontrée en TP

Définition 3 :
On appelle fonction exponentielle l'unique fonction solution, sur $\mathbb{R}$, du problème différentiel :

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On la note exp. Ainsi :

$$\exp(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \exp'(x) = \exp(x)$$

Propriété 1 :
1. $\exp(0) = 1$
2. exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exp'(x) = \exp(x)$
3. Pour tout réel x on a $\exp(-x) \times \exp(x) = 1 \iff \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
4. Pour tout réel x on a $\exp(x) \neq 0$
5. Pour tout réel x on a : $\exp(x) > 0$
6. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Preuve
1. et 2. En effet puisque exp est solution du problème différentiel.

3. et 4. On a démontré dans le TP d'introduction que si f était solution du problème différentiel alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x)f(-x) = 1$$

et par conséquent comme exp est l'unique solution de ce problème on a pour tout réel x :

$$\exp(x) \times \exp(-x) = 1 \qquad \text{et } \exp(x) \neq 0$$

Preuve (Suite)

5.et 6. On sait déjà que $\exp(0) = 1 > 0$. Supposons qu'il existe un réel x_1 tel que $\exp(x_1) < 0$ alors comme la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle y est aussi continue et d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe une solution à l'équation $\exp(x) = 0$, ce qui est absurde. Par conséquent $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a donc pour tout réel x :

$$\exp'(x) = \exp(x) > 0$$

La fonction exp est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2 :
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors

$$(\exp(u))' = u' \times \exp(u)$$

Preuve

On sait que

$$(v \circ u)' = u' \times v'(u)$$

On applique ce résultat pour $v = \exp$.

Exemples :

Etudier les variations des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp(3x^2 + 1) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \exp(-2x + 1)$$

Pour tout réel x : $f'(x) = 6x\exp(3x^2 + 1)$.
Or $\exp(X) > 0$ pour tout X. Donc $f'(x)$ est positif si et seulement $6x > 0$ si et seulement si $x > 0$.
Finalement, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Pour tout x, $g'(x) = -2\exp(-2x + 1)$.
Donc $g'(x) < 0$ pour tout x et g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

II-2 Equations différentielles du type $y' = ay$ ($a \in \mathbb{R}$)

Nous allons utiliser le travail fait précédemment.

Théorème 3 :
Le problème différentiel $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{R}$ admet une infinité de solutions.
Ce sont les fonctions f de la forme

$$f(x) = K\exp(ax) \qquad \text{où } K \text{ parcourt } \mathbb{R}$$

Preuve

– Vérifions déjà que ces fonctions sont solutions.
Soit f une telle fonction, ie de la forme $f(x) = K\exp(ax)$. Alors pour tout réel x :

$$f'(x) = K \times a\exp'(ax) = a \times K\exp(ax) = af(x)$$

– Montrons que les fonctions de cette forme sont les seules à être solutions au problèeme différentiel.
Soit f une solution quelconque du problème différentiel. On considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x)\exp(-ax)$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (f et l'exponentielle le sont) et pour tout réel x :

$$g'(x) = f'(x)\exp(-ax) - af(x)\exp(-ax)$$

Comme f est solution du problème différentiel on a $f' = af$, par conséquent

$$g'(x) = 0$$

Donc g est constante sur $\mathbb{R}$. Notons K cette constante. On a alors

$$K = f(x)\exp(ax) \Longleftrightarrow f(x) = K\exp(ax)$$

Remarque : Soit x_0 et y_0 deux réels. Le problème différentiel $\begin{cases} y' = ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution f.
En effet, on sait que les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions f de la forme $f(x) = K\exp(ax)$.
De plus on a :

$$f(x_0) = y_0 \Longleftrightarrow K\exp(ax_0) = y_0 \Longleftrightarrow K = y_0\exp(-ax_0)$$

Comme K est entièrement déterminé, on a bien l'unicité et $f(x) = y_0\exp(-ax_0)\exp(ax)$.

Exemples :

– Résoudre l'équation différentielle $2y' + 3y = 0$ et $y(0) = 5$.
On commence par réécrire l'équation sous la forme $y' = ay$:
$2y' + 3y = 0 \Longleftrightarrow y' = -\dfrac{3}{2}y$.
Donc les solutions sont les fonctions du type $f : x \longmapsto K\exp\left(-\dfrac{3}{2}x\right)$ avec $K \in \mathbb{R}$.
Cherchons la constante :
On sait que $f(0) = 5$ donc on cherche K tel que $K\exp\left(-\dfrac{3}{2} \times 0\right) = 5 \Longleftrightarrow K\exp(0) = 5 \Longleftrightarrow K = 5$.
D'où $f(x) = 5\exp\left(-\dfrac{3}{2}x\right)$.

– Résoudre l'équation différentielle $\begin{cases} y' = 3y \\ y(2) = 7 \end{cases}$.
Les solutions sont les fonctions du type $f : x \longmapsto K\exp(3x)$ avec $K \in \mathbb{R}$.
De plus $f(2) = 7 \Longleftrightarrow K\exp(3 \times 2) = 7 \Longleftrightarrow K = 7\exp(-6)$.
D'où $f(x) = 7\exp(-6)\exp(3x)$.

Exercices du livre :

n°30 à 34 p 129

Exercice 2 :

Les observations relevées pour l'étude d'une population p d'une bactérie dans une certaine préparation biologique ont conduit à envisager le modèle suivant :

– le temps t en heures
– p est une fonction de t dérivable sur $[0;+\infty[$ et $p' = 2,5p$ et $p(0) = 10$

1. Déterminer $p(t)$
2. Donner un ordre de grandeur de cette population au bout de 10 heures.

Exercice 3 :

Au début d'une épidémie, on constate que 0.01% de la population est contaminé. Pour t appartenant à $[0;30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours. On a donc $y(0) = 0.01$.
On admet que la fonction y ainsi définie sur $[0;30]$ est dérivable, strictement positive et vérifie :

$$y' = 0.05y(10-y)$$

1. On considère la fonction z définie sur l'intervalle $[0;30]$ par $z = \dfrac{1}{y}$.
   Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions :
   $$\begin{cases} y' = 0.05y(10-y) \\ y(0) = 0.01 \end{cases}$$
   si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions :
   $$\begin{cases} z' = -0.5z + 0.05 \\ z(0) = 100 \end{cases}$$
2. **a.** En déduire une expression de la fonction z puis celle de la fonction y.
   b. Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Exercice 4 :

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intevalle $]0;+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle :

$$(E) \quad xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2$$

1. **a.** Démontrer que si f est solution de (E) alors la fontion g définie sur l'intevalle $]0;+\infty$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E') \quad y' = 2y + 8$.
   b. Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E).
2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).
3. Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $A(2;0)$? Si oui, la préciser.

Exercice 5 :

1. Résoudre l'équation différentielle

$$2y' + y = 0 \quad (E)$$

dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. On considère l'équation différentielle :

$$2y' + y = \exp\left(-\frac{x}{2}\right)(x+1) \quad (E')$$

   a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x}{2}\right)(mx^2 + px)$$

   soit solution de (E').

   b. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que g est solution de l'équation (E') si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E).
   Résoudre l'équation (E').

Exercice 6 :

Partie A : On donne un entier naturel n strictement positif et on considère l'équation différentielle :

$$(E_n) \quad y' + y = \frac{x^n}{n!}\exp(-x)$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour toutx réel $g(x) = h(x)\exp(-x)$.

   a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si pour tout x réel

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}$$

   b. En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$. Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit ϕ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

   a. Montrer que ϕ est solution de (E_n) si et seulement si $\phi - g$ est solution de l'équation $(F) \quad y' + y = 0$.

   b. Résoudre (F).

   c. Déterminer la solution générale ϕ de l'équation (E_n).

   d. Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie B : On pose pour tout x réel, $f_0(x) = \exp(-x)$, et $f_1(x) = x\exp(-x)$.

1. Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle $y' + y = f_0$.

2. Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.
   En utilisant la partie A, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout $n \geq 1$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}\exp(-x)$.

Exercice 7 :

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(C)\quad \begin{cases} f(-x)f'(x)=1 & \text{pour tout nombre réel } x \\ f(0)=-4 \end{cases}$$

(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de trouver cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(-x)f(x)$.

- **a.** Démontrer que la fonction f ne s'annule par sur $\mathbb{R}$.
- **b.** Calculer la fonction dérivée de la fonction g.
- **c.** En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.
- **d.** On considère l'équation différentielle $(E)\quad:\quad y'=\dfrac{1}{16}y$. Montrer que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0)=-4$.

2. Question de cours :

- **a.** On sait que la fonction $x\mapsto \exp\left(\dfrac{x}{16}\right)$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x\mapsto K\exp\left(\dfrac{x}{16}\right)$, où K est un nombre réel quelconque.
- **b.** Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.
- **c.** Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant (C) et préciser quelle est cette fonction.

II-3 Equation différentielle $y'=ay+b$ avec a et b réels, $a\neq 0$

Théorème 4 :

Soit $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$. Le problème différentiel :

$$y'=ay+b$$

admet une infinité de solutions. Ce sont les fonctions f de la forme :

$$f(x)=K\exp(ax)-\frac{b}{a}\qquad \text{où } K \text{ parcourt } \mathbb{R}$$

Remarque : On remarque que la partie $K\exp(ax)$ est la solution de l'équation correspondante sans second membre $y'=ay$ et que $-\dfrac{b}{a}$ est en fait l'unique solution constante de équation différentielle $y'=ay+b$.
On retiendra davantage les méthodes que les formules ...

Preuve

Remarquons que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution particulière de $y' = ay + b$.

On a en effet $g' = 0$ et $ag + b = a\left(-\dfrac{b}{a}\right) + b = 0$.

Soit f une solution quelconque de (E). (On sait déjà qu'il en existe au moins une, g). On a sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f' = af + b \\ g' = ag + b \end{cases}$$

En retranchant membre à membre on obtient :

$$(f-g)' = a(f-g)$$

Par conséquent la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$ dont on connait la forme des solutions. D'où , pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f(x) - g(x) = K\exp(ax) \quad$ avec $K \in \mathbb{R}$.
Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on obtient :

$$f(x) = K\exp(ax) + g(x) = K\exp(ax) - \frac{b}{a}$$

Ainsi l'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une infinité de solutions de la forme

$$f(x) = K\exp(ax) - \frac{b}{a} \qquad \text{où } K \text{ parcourt } \mathbb{R}$$

Exemple :

Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $\sqrt{2}y' - 2y = 1$.
On commence par réécrire l'équation sous la fome du théorème :

$$\sqrt{2}y' - 2y = 1 \iff y' = \sqrt{2}y + 1$$

Donc les solutions sont les fonctions f de la forme $f(x) = K\exp(x\sqrt{2}) - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ où K parcourt $\mathbb{R}$.

Remarque : Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Le problème différentiel $\begin{cases} y' = ay + b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution f.
En effet, d'après le théorème précédent, l'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une infinité de solutions de la forme

$$f(x) = K\exp(ax) - \frac{b}{a} \qquad \text{K} \in \mathbb{R}$$

Si, de plus $y(x_0) = y_0$, alors f est solution si et seulement si

$$\begin{aligned} f(x_0) = y_0 \quad &\iff \quad K\exp(ax_0) - \frac{b}{a} = y_0 \\ &\iff \quad K = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)\exp(-ax_0) \end{aligned}$$

Comme K est entièrement déterminé, f aussi, d'où l'unicité et $f(x) = \left(y_0 + \dfrac{b}{a}\right)\exp(-ax_0)\exp(ax) - \dfrac{b}{a}$

Exemple :

Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $\sqrt{2}y' - 2y = 1$ avec la condition initiale $y(0) = 2$.

On sait d'apère l'exemple précédent que les solutions f sont de la forme $f(x) = K\exp(x\sqrt{2}) - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

De plus on a $f(0) = 2 \Longleftrightarrow K\exp(0) - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2 \Longleftrightarrow K = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Donc la solution du problème différentielle est $f(x) = \left(2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\exp(x\sqrt{2}) - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 8 **:**

Résoudre le problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} y' + 2y = 6 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 9 **:**

La température de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction f du temps t.

f est définie sur l'ensemble des nombres réels positifs et vérifie l'équation différentielle :

$$f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = 10$$

La température est exprimée en derés Celsius et le teps t en heures.

Déterminer $f(t)$ pour $t \geq 0$ sachant que pour $t = 0$, la températue de l'objet est 220° C.

III) Relation fonctionnelle et conséquences

III-1 $f(x+y) = f(x)f(y)$

Théorème 5 :

Pour tous réels a et b :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

La fonction exponentielle transforme les sommes en produits.

Preuve

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \exp(x+a)\exp(-x)$$

On a alors $g(0) = \exp(a)\exp(0) = \exp(a)$.
De plus on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \exp'(x+a)\exp(-x) - \exp(x+a)\exp'(-x) \\ &= \exp(x+a)epx(-x) - \exp(x+a)\exp(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent la fonction est constante sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(x+a)\exp(-x) = \exp(a) \Longleftrightarrow \exp(x+a) = \frac{\exp(a)}{\exp(-x)}$$

Or, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$$

Par conséquent on peut conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\exp(x+a) = \exp(a) \times \exp(x)$$

En choisissant $x = b$ on obtient le résultat voulu.

Remarque : Réciproquement, toute fonction transformant les sommes en produits est une fonction du type :

$$f(x) = \exp(ax) \qquad \text{où} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Nous admettrons ce résultat.

Propriété 2 :

Pour tous réels a et b et pour tout entier relatif n on a :

1. $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
2. $\exp(na) = [\exp(a)]^n$, $n \in \mathbb{Z}$
3. $\exp\left(\dfrac{a}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(a)}$ pour $n \geq 1$

Preuve

Pour tous réels a et b on a, d'après le théorème précédent :

1. $\exp(a-b) = \exp(a)\exp(-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
   Remarquons qu'en prenant $a = 0$ dans la relation précédente, on obtient retrouve le résultat :
$$\exp(-b) = \frac{\exp(0)}{\exp(b)} = \frac{1}{\exp(b)}$$

2. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ afin de démontrer la propriété $\mathscr{P}(n)$: $\exp(na) = [\exp(a)]^n$
   – *Initialisation* : Pour $n = 0$ on a : $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$ et $(\exp(a))^0 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   – *Hérédité* : Supposons que la propriété $\mathscr{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier n, montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$. On a :
$$\begin{aligned}\exp((n+1)a) &= \exp(na+a) \\ &= \exp(na)\exp(a) && \text{puisque } \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \\ &= [\exp(a)]^n \exp(a) && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= [\exp(a)]^{n+1}\end{aligned}$$
   Ainsi la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$.
   On vient de démonter que pour tout $n \in \mathbb{N}$:$\exp(na) = [\exp(a)]^n$

   Qu'en est-il si $n < 0 \iff -n > 0$?
   On sait que
$$\exp(-na)\exp(na) = 1$$
   Donc :
$$\exp(na) = \frac{1}{\exp(-na)} = \frac{1}{(\exp(a))^{-n}} = [\exp(a)]^n$$
   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :
$$\exp(na) = [\exp(a)]^n$$

3. Un petit rappel d'abord, la racine $n-ième$ d'un nombre réel positif est l'unique solution de l'équation $x^n = r$.
   On a pour tout $n \geq 1$ $\exp\left(\frac{a}{n}\right)^n = \exp\left(n \times \frac{a}{n}\right) = \exp(a)$, par conséquent :
$$\exp\left(\frac{a}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(a)}$$

III-2 Nouvelle notation

Notation

On note e le nombre $\exp(1)$:
$$e = \exp(1) \simeq 2,718$$

Remarque :

– On a vu dans le TD d'introduction que :

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

– Avec les propriétés de la fonction exponentielle, on a alors $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(1)]^n = e^n$$

De plus, comme l'exponentielle transforme les sommes en produits, on a, pour tous n et m dans $\mathbb{Z}$:

$$e^{n+m} = \exp(n+m) = \exp(n)\exp(m) = e^n e^m$$

d'où la notation suivante :

Notation

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note

$$e^x = \exp(x)$$

Remarque : Cette notation est légitime, elle ne fait que prolonger à tous les réels, une propriété constatée sur les entiers.

Résumons désormais, à l'aide de cette nouvelle notation, toutes les propriétés rencontrées sur la fonction exponentielle :

Résumé

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour toute fonction u dérivable sur I, on a

1. $e^0 = 1$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $e^1 = e$
4. $e^x e^{-x} = 1$
5. $e^x > 0$
6. $e^x e^y = e^{x+y}$
7. $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
8. $e^{nx} = (e^x)^n$
9. $(e^u)' = e^u \times u'$
10. $e^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{e^x}$, $n \geq 1$

Exercice 10 :

Simplifier :

1. $e^{x+2}e^{-x+2}$
2. $\dfrac{e^{-2x+1}}{e^{-x+1}}$
3. $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
4. $\sqrt{\left(e^{-2x+1}\right)^2}$

Solutions des équations différentielles

– Le problème différentiel : $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = e^x$$

– Soit $a \in \mathbb{R}$. Le problème différentiel : $\begin{cases} y' = ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = K_0 e^{ax} \qquad \text{où } K_0 \text{ est une constante qui dépend de la condition initiale.}$$

– Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Le problème différentiel : $\begin{cases} y' = ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = K_0 e^{ax} - \frac{b}{a} \qquad \text{où } K_0 \text{ est une constante qui dépend de la condition initiale}$$

<u>Exercice 11</u> :

Répondre par vrai ou faux :

– La fonction exp est l'unique fonction égale à sa dérivée.
– Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = -2$ alors pour tout réel x on a $f(x) = -2\exp(x)$
– La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\exp(2x+1)$ est telle que $f' = 2f$
– La fonction exp est l'unique fonction telle que pour tous réels $x$et y on a $f(x+y) = f(x)f(y)$
– Pour tout réel x on a $\dfrac{\exp(3x+2)}{\exp(x+2)} = \exp(3)$
– Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x et tout réel y , $f(x+y) = f(x)f(y)$ et $f(0) = 1$ alors il existe un réel k tel que $f' = kf$
– Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \exp(u_n)$.
Si (u_n) est arithmétique alors (v_n) est géométrique.

IV) Etude de la fonction exponentielle