EXERCICES : EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET FONCTION EXPONENTIELLE

Exercice 1.

Six affirmations, réparties en deux thèmes et numérotées de 1. a à 2. c sont proposées ci-dessous. Le candidat portera sur sa copie, en regard du numéro de l'affirmation, et avec le plus grand soin, la mention VRAI ou FAUX.
Chaque réponse convenable rapporte 0,4 point. Chaque réponse erronée enlève 0,1 point. Il n'est pas tenu compte de l'absence de réponse. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Pour tout réel x, e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle.

Affirmation 1. a	Pour tous les réels a et b : $(\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{(a^b)}$.
Affirmation 1. b	Pour tous les réels a et b : $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$.
Affirmation 1. c	La droite d'équation $y = x+1$ est la tangente en 1 à la courbe de la fonction exponentielle.

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.

Affirmation 2. a	Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Affirmation 2. b	Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.
Affirmation 2. c	Si f est dérivable en a, alors la fonction $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.

2. Justifier que pour tout x, $(\mathrm{e}^x - x)$ est strictement positif.

Partie B

1. **a.** Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Interpréter graphiquement les résultats précédents.

2. **a.** Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.

b. Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations.

3. **a.** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b. À l'aide de la **partie A**, étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite T.

4. Tracer la droite T, les asymptotes et la courbe $\mathscr{C}$.